Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

I Der Laplace-Operator und die Poissongleichung 1

1 Klassische Lösungen der Poissongleichung 3
1.1 Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln 3
1.2 Die Darstellungsformel 7
1.3 Das Poissonintegral 13
1.4 Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen 19
1.5 Das Perronverfahren 24
1.6 Das Newtonpotential 33

2 Schwache Lösungen der Poissongleichung 45
2.1 Das Dirichletsche Prinzip und warum man Sobolevräume braucht . . 45
2.2 Sobolevräume 49
2.3 Der Laplace-Operator auf Sobolevräumen 56
2.4 Randwerte 62
2.5 Regularität 64
2.6 Ausblick 71

3 Diskretisierung der Poissongleichung 75
3.1 Diskretisierungstechniken 75
3.1.1 Diskretisierung am Beispiel eines Differenzenverfahrens . . . 75
3.1.2 Das Ritz-Galerkin-Verfahren 83
3.2 Finite Elemente 89
3.2.1 Simplexe 89
3.2.2 Simpliziale Lagrange-Elemente 94
3.3 Interpolation 102
3.3.1 Poincaréungleichungen 104
3.3.2 Interpolationsabschätzungen 109
3.4 Konvergenz und Abschätzung des Fehlers 116
3.5 Sobolevsche Einbettungssätze 119
3.6 Randapproximation 126
3.7 Die Kondition der Steifigkeitsmatrix 140

II Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 149

4 Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung 151

4.1 Der funktionalanalytische Rahmen . . . 152
4.2 Schwache Lösungen . . . 155
4.3 Diskrete Lösungen und Fehlerabschätzung . . . 158
4.4 Monotone elliptische Probleme . . . 162
4.5 Das Neumann-Problem . . . 169
4.6 A-Priori-Abschätzungen . . . 174
4.7 Randregularität . . . 180

5 Theorie und Numerik parabolischer Differentialgleichungen 2. Ordnung 183

5.1 Algebraische Klassifizierung linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . 183
5.2 Das Cauchyproblem für die Wärmeleitungsgleichung . . . 185
5.3 Das Maximumprinzip und der Vergleichssatz . . . 190
5.4 Schwache Lösungen der Wärmeleitungsgleichung . . . 195
5.5 Die Ritzprojektion . . . 210
5.6 Ortsdiskretisierung . . . 212
5.7 Zeitdiskretisierung . . . 219
5.7.1 Stabilität . . . 221
5.7.2 Konvergenz . . . 226
5.8 Sobolevräume . . . 237
5.8.1 Spursatz . . . 237
5.8.2 Approximierbarkeit von Sobolevfunktionen . . . 241

III Erweiterungen von Theorie und Numerik 255

6 Theorie und Numerik der linearen Wellengleichung 257

6.1 Der eindimensionale Fall . . . 257
6.2 Das Cauchyproblem für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ . . . 259
6.3 Das Anfangsrandwertproblem für die lineare Wellengleichung . . . 268
6.4 Ortsdiskretisierung der Wellengleichung . . . 276

7 Datenapproximation und Quadratur 280

7.1 Quadraturformeln . . . 280
7.2 Konvergenz bei numerischer Integration . . . 285

8 Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung 292

8.1 Die Plattengleichung . . . 292
8.2 Hermite-Elemente . . . 298

IV Anhang **305**

A Elementare Funktionalanalysis 307
A.1 Abstrakte Räume . . . 307
A.1.1 Metrischer Raum . . . 307
A.1.2 Normierter Raum . . . 308
A.1.3 Hilbertraum . . . 308
A.2 Konkrete Räume . . . 309
A.2.1 Lebesgue-Räume . . . 309
A.2.2 Hölder-Räume . . . 310
A.3 Stetige lineare Abbildungen . . . 311
A.3.1 Der Begriff des linearen Operators . . . 311
A.3.2 Dualraum . . . 311

B Lebesgueintegral 313

Literaturverzeichnis 314

Index 317