

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>9</b>
1.1 Karten und Atlanten . . . . .	9
1.2 Topologisierung . . . . .	13
1.3 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^m$ . . . . .	14
<b>2 Tangentenvektoren</b>	<b>19</b>
2.1 Der Tangentialraum . . . . .	19
2.2 Erzeugung von Tangentenvektoren . . . . .	21
2.3 Vektorfelder . . . . .	24
2.4 Die Lie-Klammer . . . . .	25
<b>3 Tensoren</b>	<b>28</b>
3.1 Einführung . . . . .	28
3.2 Multilinearformen . . . . .	29
3.3 Komponenten . . . . .	31
3.4 Operationen mit Tensoren . . . . .	33
3.5 Tensoren auf euklidischen Räumen . . . . .	35
<b>4 Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten</b>	<b>39</b>
4.1 Tensorfelder . . . . .	39
4.2 Riemann'sche Mannigfaltigkeiten . . . . .	41
4.3 Bilinearformen . . . . .	42
4.4 Orientierung . . . . .	45
4.5 Raumzeit . . . . .	48
<b>5 Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>52</b>
5.1 Kinematik . . . . .	52
5.2 Dynamik . . . . .	57

5.3	Elektrodynamik . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Differentialformen</b>	<b>62</b>
6.1	$p$ -Formen . . . . .	62
6.2	Das Keilprodukt . . . . .	64
6.3	Der Hodge-Stern-Operator . . . . .	65
6.4	Äußere Differentiation . . . . .	69
6.5	Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern</b>	<b>79</b>
7.1	Die Richtungsableitung in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	79
7.2	Der Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	80
7.3	Christoffel-Symbole . . . . .	82
7.4	Kovariante Ableitung auf Hyperflächen . . . . .	84
7.5	Die kovariante Ableitung in der Schwarzschild-Raumzeit . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Krümmung</b>	<b>89</b>
8.1	Der Krümmungstensor . . . . .	89
8.2	Die Weingarten-Abbildung . . . . .	92
8.3	Der Ricci-Tensor . . . . .	97
8.4	Die Krümmung der Schwarzschild-Raumzeit . . . . .	99
8.5	Zusammenhangsformen und Krümmungsformen . . . . .	101
<b>9</b>	<b>Materie</b>	<b>108</b>
9.1	Masse . . . . .	108
9.2	Energie und Impuls einer Strömung . . . . .	109
9.3	Der Energie-Impuls-Tensor . . . . .	112
9.4	Ladung . . . . .	115
9.5	Energie und Impuls im elektromagnetischen Feld . . . . .	117
9.6	Die Einstein'sche Feldgleichung . . . . .	122
9.7	Kugelsymmetrische Lösungen . . . . .	123
9.8	Äußere und innere Schwarzschild-Metrik . . . . .	126
<b>10</b>	<b>Geodäten</b>	<b>130</b>
10.1	Zeit . . . . .	130

10.2	Die Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	132
10.3	Die Geodätengleichung . . . . .	133
10.4	Die geodätische Abweichung . . . . .	137
10.5	Periheldrehung . . . . .	142
10.6	Lichtablenkung . . . . .	146
10.7	Rotverschiebung . . . . .	148
<b>11</b>	<b>Kovariante Differentiation von Tensorfeldern</b>	<b>150</b>
11.1	Paralleltransport von Vektoren . . . . .	150
11.2	Paralleltransport von Tensoren . . . . .	153
11.3	Rechenregeln und Komponentendarstellung . . . . .	155
11.4	Die zweite Bianchi-Identität . . . . .	158
11.5	Divergenz . . . . .	159
<b>12</b>	<b>Die Lie-Ableitung</b>	<b>162</b>
12.1	Der Fluss und seine Tangenten . . . . .	162
12.2	Pull-back und Push-forward . . . . .	164
12.3	Axiomatischer Zugang . . . . .	168
12.4	Die Ableitungsformel . . . . .	169
12.5	Komponentendarstellung . . . . .	171
12.6	Killing-Vektoren . . . . .	172
12.7	Die Lie-Ableitung von Differentialformen . . . . .	174
<b>13</b>	<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>176</b>
13.1	Einführung . . . . .	176
13.2	Zerlegung der Eins . . . . .	177
13.3	Integrale . . . . .	181
13.4	Berandete Mannigfaltigkeiten . . . . .	184
13.5	Integralsätze . . . . .	185
13.6	Extremalprinzipien . . . . .	187
<b>14</b>	<b>Nichtrotierende Schwarze Löcher</b>	<b>193</b>
14.1	Die Schwarzschild-Halbebene . . . . .	193
14.2	Optik Schwarzer Löcher . . . . .	198

14.3	Die Kruskal-Ebene . . . . .	202
<b>15</b>	<b>Kosmologie</b>	<b>206</b>
15.1	Räume konstanter Krümmung . . . . .	206
15.2	Die Robertson-Walker-Metrik . . . . .	210
15.3	Weltmodelle . . . . .	214
<b>16</b>	<b>Rotierende Schwarze Löcher</b>	<b>218</b>
16.1	Die Kerr-Metrik . . . . .	218
16.2	Andere Darstellungen der Kerr-Metrik . . . . .	221
16.3	Kausale Struktur . . . . .	224
16.4	Kovariante Ableitung und Krümmung . . . . .	226
16.5	Erhaltungssätze . . . . .	230
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>236</b>
	<b>Index</b>	<b>238</b>