

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	III
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	VII
<b>Verzeichnis der Abbildungen, Tabellen und Beispiele</b> .....	xv
<b>1 Algebraische und zahlentheoretische Grundlagen</b>	1
<b>1 Zahlentheoretische Grundlagen</b> .....	1
1.1 Naturliche und ganze Zahlen, Teilbarkeit .....	1
1.2 ggT, kgV und euklidischer Algorithmus .....	3
1.3 Primzahlen und Primfaktorzerlegung .....	5
1.4 Kongruenzen, Restklassen und Restklassenarithmetik ..	6
1.5 Zahlentheoretische Funktionen .....	9
1.6 Potenzreste .....	12
1.6.1 Allgemeine Potenzreste .....	12
1.6.2 Quadratische Potenzreste .....	14
<b>2 Algebraische Grundlagen</b> .....	15
2.1 Gruppen .....	15
2.1.1 Definitionen und Rechenregeln .....	15
2.1.2 Untergruppen, Nebenklassen und der Satz von Lagrange ..	17
2.1.3 Strukterhaltende Abbildungen: Morphismen .....	20
2.1.3.1 Isomorphie .....	20
2.1.3.2 Homomorphie .....	22
2.1.4 Beispiele für Gruppen .....	23
2.1.4.1 Restklassengruppen und zyklische Gruppen ..	23
2.1.4.2 Faktorgruppen .....	27
2.2 Ringe .....	29
2.2.1 Definitionen, Rechenregeln und Nullteiler ..	30
2.2.2 Unterringe .....	32
2.2.3 Strukterhaltende Abbildungen: Morphismen ..	33
2.2.3.1 Isomorphie .....	33
2.2.3.2 Homomorphie .....	33
2.2.4 Beispiele für Ringe .....	34

2.2.4.1	Restklassenringe .....	34
2.2.4.2	Polynomringe ....	35
2.3	Endliche Körper .....	37
2.3.1	Definitionen und Rechenregeln ..	37
2.3.2	Erweiterungskörper .....	41
2.3.3	Hauptsatz der endlichen Körper .....	45
2.3.4	Darstellungen der Elemente endlicher Körper .....	47
2.4	Quadratische Körpererweiterungen und komplexe Zahlen .....	50
2.4.1	Komplexe Zahlen: Zahrentheoretischer Zugang ..	50
2.4.2	Komplexe Zahlen: Algebraischer Zugang ..	54
<b>2</b>	<b>Algebraische Analysis</b>	<b>59</b>
<b>1</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen</b> .....	<b>60</b>
1.1	Potenzen und Wurzeln .....	61
1.2	Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra .....	65
1.3	Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegung .....	69
1.4	Transzendente Funktionen ..	71
1.4.1	Vorbemerkungen .....	71
1.4.2	Definitionen und Formeln transzenter Funktionen für $p > 2$ ..	71
1.4.3	Algebraische Eigenschaften ..	74
1.4.4	Analytische Eigenschaften .....	81
1.4.5	Reelle transzendente Funktionen für $p > 2$ ..	84
1.4.6	Umkehrfunktionen transzenter Funktionen für $p > 2$ .....	91
1.4.7	Transzendente Funktionen für $p = 2$ .....	94
<b>2</b>	<b>Differential- und Integralrechnung reeller Funktionen</b> .....	<b>96</b>
2.1	Differentialrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen...	96
2.1.1	Stetigkeit .....	96
2.1.2	Differenzen- und Differentialquotienten ..	97
2.1.3	Elementare Anwendungen der Differentialrechnung .....	101
2.1.4	Ableitung elementarer Funktionen .....	104
2.1.4.1	Algebraische Funktionen .....	104
2.1.4.2	Transzendente Funktionen .....	106
2.2	Integralrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen .....	108
2.2.1	Definition des Integrals .....	108
2.2.2	Hauptsätze der Integralrechnung .....	110
2.3	Ausblick auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	111
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen</b> .....	<b>114</b>
3.1	Folgen und Reihen .....	114
3.2	Polynome, Polynomringe und Potenzreihen .....	118
<b>4</b>	<b>Komplexe Analysis (Funktionentheorie)</b> .....	<b>123</b>
4.1	Grundbegriffe .....	124
4.2	Differenziation komplexer Funktionen und Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen für $p > 2$ ..	130
4.3	Integration im Komplexen für $p > 2$ .....	135

4.3.1	Komplexe Kurvenintegrale .....	135
4.3.2	Cauchy'scher Integralsatz und Folgerungen .....	138
4.3.3	Residuen und Residuensatz .....	143
4.4	Differenziation und Integration im Komplexen für $p = 2$ .....	148
<b>3</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>153</b>
<b>1</b>	<b>Vektorräume und Vektoren</b> .....	<b>154</b>
1.1	Definitionen .....	154
1.2	Skalarprodukt .....	156
1.3	Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen .....	159
<b>1.4</b>	<b>Matrizen</b> .....	<b>161</b>
2.1	Matrizenalgebra .....	161
2.2	Determinanten .....	164
2.3	Matrixinversion .....	165
2.4	Spezielle Matrizen .....	168
<b>3</b>	<b>Vektoren und Matrizen: Lineare Gleichungssysteme</b> .....	<b>170</b>
3.1	Reguläre Gleichungssysteme .....	170
3.2	Singuläre Gleichungssysteme und allgemeines Lösungsverhalten .....	172
<b>4</b>	<b>Eigenwertprobleme</b> .....	<b>174</b>
4.1	Definitionen .....	174
4.2	Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms .....	175
4.3	Eigenvektoren und Eigenräume .....	177
4.4	Spezialfälle bestimmter Matrizen .....	179
4.5	Drehmatrizen .....	182
4.6	Jordan'sche Normalform .....	187
4.6.1	Definition und Konstruktion der Jordan'schen Normalform .....	187
4.6.2	Eigenschaften der Jordan'schen Normalform .....	191
4.7	Satz von Cayley-Hamilton und Minimalpolynom .....	193
<b>5</b>	<b>Matrizenfunktionen</b> .....	<b>196</b>
5.1	Ersatzpolynom einer Matrixfunktion und seine Taylor'sche Summe .....	196
5.2	Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus .....	201
5.2.1	Formeln .....	201
5.2.2	Berechnung der Matrixexponentialfunktion für $p > 2$ .....	203
5.2.3	Berechnung des Matrixlogarithmus für $p > 2$ .....	209
5.2.4	Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus für $p = 2$ .....	211
5.3	Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus .....	214
<b>6</b>	<b>Tensoralgebra und Tensoranalysis</b> .....	<b>217</b>
6.1	Tensoralgebra .....	217
6.1.1	Einführung .....	217
6.1.2	Tensoren zweiter Stufe .....	219
6.1.3	Tensoren beliebiger Stufe und Rechenregeln .....	222

6.2	Tensoranalysis.....	223
6.2.1	Einführung .....	223
6.2.2	Christoffel'sche Symbole und kovariante Ableitung .....	226
<b>4</b>	<b>Geometrie</b>	<b>231</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe der algebraischen Geometrie und der geometrischen Algebra .</b>	<b>232</b>
1.1	Grundbegriffe der algebraischen Geometrie .....	232
1.2	Grundbegriffe der geometrischen Algebra .....	234
<b>2</b>	<b>Kegelschnitte: Kreise, Ellipsen und Hyperbeln .....</b>	<b>238</b>
2.1	Einführung .....	238
2.2	Pythagoräische Gleichung und ihre Lösungen .....	240
2.3	Kreise und Ellipsen .....	242
2.4	Hyperbeln und Parabeln.....	249
2.5	Kreise und Hyperbeln in der pseudo-euklidischen Geometrie .....	254
<b>3</b>	<b>Kugeln, Hyperkugeln und Hyperboloiden .....</b>	<b>258</b>
3.1	Zahl der Punkte von $n$ -dimensionalen Kugeln und Hyperboloiden .....	259
3.2	Graphische Darstellung von Kugeln und Hyperboloiden der Dimension 3 .....	266
3.3	Zahl der Kreise in Kugeln und Hyperboloiden .....	272
3.4	Weitere Ergebnisse und Aspekte $n$ -dimensionaler Kugeln und Hyperboloiden .....	275
3.5	Hyperkugeln in der Charakteristik $p = 2$ .....	276
<b>4</b>	<b>Symplektische Geometrie und Spinoren .....</b>	<b>278</b>
4.1	Spinoren und Spinoralgebra .....	278
4.2	Spinoren, Quaternionen und 4-Vektoren .....	282
4.3	Zusammenhang der Gruppen $SU(2; \mathbb{F}_C)$ und $SO(3, \mathbb{F}_R)$ .....	285
<b>5</b>	<b>Differenzialgeometrie .....</b>	<b>289</b>
5.1	Differenzialgeometrie der Raumkurven .....	289
5.1.1	Definitionen und die Formeln von Frenet.....	289
5.1.2	Vollständiges Invariantensystem der Raumkurven .....	295
5.2	Flächen und Flächenkurven .....	304
5.3	Innere Geometrie der Flächen .....	309
5.3.1	Geodatische Krümmung und geodatische Lинien .....	309
5.3.2	Normal- und Hauptkrümmungen .....	312
<b>5</b>	<b>Algebren</b>	<b>315</b>
<b>1</b>	<b>Einführung: Mannigfaltigkeiten.....</b>	<b>316</b>
1.1	Topologische Grundbegriffe und Mannigfaltigkeiten .....	316
1.2	Tangentialräume und Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten .....	320

<b>2</b>	<b>Lie-Gruppen und -Algebren</b> .....	323
2.1	Lie-Gruppen .....	323
2.1.1	Definitionen und die 1-Parametergruppe-Untergruppe .....	323
2.1.2	Klassische Lie-Gruppen .....	326
2.2	Lie-Algebren .....	329
2.2.1	Definitionen und Eigenschaften von Lie-Algebren .....	329
2.2.2	Algebraischer Zugang zu Lie-Algebren .....	331
2.2.3	Klassische Lie-Algebren .....	334
<b>3</b>	<b>Grassmann-Algebra und die Anwendung auf den Differenzialformenkalkül</b> .....	335
3.1	Grassmann Algebra... .....	335
3.2	Differenzialformenkalkul .....	340
3.2.1	Außere Differenziation und die Operatoren der Vektoranalysis .....	341
3.2.2	Integration von Differenzialformen und Integralsatze .....	344
3.2.3	Anwendung von Differenzialformen auf die Maxwell'schen Gleichungen .....	347
<b>4</b>	<b>Clifford-Algebren</b> .....	349
4.1	Definitionen .....	349
4.2	Spezielle Clifford-Algebren .....	351
4.3	Pauli- und Dirac-Matrizen: Die Algebren $Cl_{0,2}$ und $Cl_{1,3}$ in der Charakteristik 0 .....	353
4.3.1	Pauli-Matrizen .....	353
4.3.2	Dirac-Matrizen .....	355
4.4	Quaternionen, Pauli- und Dirac-Matrizen über endlichen Körpern .....	356
4.4.1	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p > 2$ .....	357
4.4.2	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p = 2$ .....	361
4.4.3	Dirac-Matrizen für $p > 2$ .....	363
<b>6</b>	<b>Anwendungen endlicher Körper in der Systemtheorie</b>	367
<b>1</b>	<b>Systemtheorien in der Charakteristik 0</b> .....	368
1.1	Definitionen .....	368
1.2	Lineare zeitkontinuierliche Systemtheorien .....	370
1.2.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie .....	370
1.2.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie .....	373
1.3	Lineare zeitdiskrete Systemtheorien .....	377
1.3.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie .....	377
1.3.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie .....	378
<b>2</b>	<b>Systemtheorien in der Charakteristik <math>p</math></b> .....	381
2.1	Automaten und zeitinvariante Systeme .....	381
2.1.1	Automaten .....	381
2.1.2	Lineare zeitinvariante Systeme .....	382
2.1.2.1	$\mathcal{A}$ -Transformation .....	382
2.1.2.2	Lineare zeitinvariante Systeme .....	390

2.2	Lösung der homogenen Gleichung .....	393
2.2.1	Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 0$ .....	393
2.2.2	Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 1$ .....	398
2.2.3	Struktur des Zustandsraumes für die Eigenwerte $\lambda \neq 0, 1$ .....	400
2.2.4	Allgemeiner Fall .....	405
2.2.5	Stabilitätsverhalten von Systemen .....	406
2.3	Losung der inhomogenen Gleichung .....	408
2.3.1	Autonome Systeme .....	409
2.3.2	Ausblick auf nicht-autonome Systeme .....	417
<b>7</b>	<b>Formulierung physikalischer Theorien über endlichen Körpern</b>	<b>429</b>
<b>1</b>	<b>Klassische und relativistische Mechanik</b> .....	<b>430</b>
1.1	Klassische Mechanik in der Charakteristik $p$ .....	431
1.1.1	Elementare Variationsrechnung .....	431
1.1.2	Die Prinzipien von d'Alembert und Hamilton .....	434
1.1.3	Lagrange'sche und Hamilton'sche Gleichungen .....	435
1.1.3.1	Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art .....	435
1.1.3.2	Ableitung der Hamilton'schen Gleichungen .....	437
1.1.3.3	Kanonische Transformation der Hamilton'schen Gleichungen und Poisson'sche Klammern .....	439
1.2	Relativistische Mechanik in der Charakteristik $p$ .....	441
1.2.1	Minkowski-Raum und Lorentz-Transformation .....	441
1.2.2	Relativistische Kinematik .....	443
1.2.3	Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt .....	446
1.3	Systemtheoretische Aspekte .....	448
<b>2</b>	<b>Klassische und relativistische Elektrodynamik</b> .....	<b>450</b>
2.1	Klassische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$ .....	451
2.1.1	Maxwell'sche Gleichungen und Erhaltungssätze .....	451
2.1.2	Entkopplung der Maxwell'schen Gleichungen .....	452
2.1.3	Losungen der Wellengleichungen .....	454
2.2	Relativistische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$ .....	456
2.2.1	Definition des elektromagnetischen Feldtensors .....	456
2.2.2	Kovarianz der Maxwell'schen Gleichungen .....	458
2.2.3	Energie-Impuls-Tensor .....	459
2.3	Elektrodynamik in der Charakteristik $p = 2$ .....	462
<b>3</b>	<b>Klassische und relativistische Quantenmechanik</b> .....	<b>466</b>
3.1	Quantenmechanik .....	466
3.1.1	Axiomatische Grundlagen der Quantenmechanik .....	466
3.1.2	Darstellungen von Hilbert-Vektoren und Operatoren .....	469
3.1.3	Klassische und quantenmechanische Kommutator-Regeln .....	471
3.1.4	Heisenberg'sche Unscharferelationen .....	473
3.1.5	Invarianz Eigenschaften, Schrödinger- und Heisenberg-Bild .....	475
3.1.6	Harmonischer Oszillator .....	478

3.2	Relativistische Quantenmechanik: Dirac-Theorie .....	481
3.2.1	Dirac-Gleichung in der Charakteristik 0 .....	481
3.2.2	Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p > 2$ .....	484
3.2.2.1	Eigenschaften der Dirac-Gleichung .....	484
3.2.2.2	Lösungen der Dirac-Gleichung für ebene Elektronenwellen .....	488
3.2.3	Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p = 2$ .....	490
<b>Anhang A: Tabellen</b> .....		<b>493</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....		<b>499</b>
<b>Sachverzeichnis</b> .....		<b>507</b>