

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	III
Inhaltsverzeichnis	VII
Verzeichnis der Abbildungen, Tabellen und Beispiele	XV

1	Algebraische und zahlentheoretische Grundlagen	1
1	Zahlentheoretische Grundlagen	1
1.1	Natürliche und ganze Zahlen, Teilbarkeit	1
1.2	ggT, kgV und euklidischer Algorithmus	3
1.3	Primzahlen und Primfaktorzerlegung	5
1.4	Kongruenzen, Restklassen und Restklassenarithmetik ..	6
1.5	Zahlentheoretische Funktionen	9
1.6	Potenzreste	12
1.6.1	Allgemeine Potenzreste	12
1.6.2	Quadratische Potenzreste	14
2	Algebraische Grundlagen	15
2.1	Gruppen	15
2.1.1	Definitionen und Rechenregeln	15
2.1.2	Untergruppen, Nebenklassen und der Satz von Lagrange	17
2.1.3	Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen	20
2.1.3.1	Isomorphie	20
2.1.3.2	Homomorphie	22
2.1.4	Beispiele für Gruppen	23
2.1.4.1	Restklassengruppen und zyklische Gruppen ..	23
2.1.4.2	Faktorgruppen	27
2.2	Ringe	29
2.2.1	Definitionen, Rechenregeln und Nullteiler	30
2.2.2	Unterringe	32
2.2.3	Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen ..	33
2.2.3.1	Isomorphie	33
2.2.3.2	Homomorphie	33
2.2.4	Beispiele für Ringe	34

2.2.4.1	Restklassenringe	34
2.2.4.2	Polynomringe	35
2.3	Endliche Körper	37
2.3.1	Definitionen und Rechenregeln	37
2.3.2	Erweiterungskörper	41
2.3.3	Hauptsatz der endlichen Körper	45
2.3.4	Darstellungen der Elemente endlicher Körper	47
2.4	Quadratische Körpererweiterungen und komplexe Zahlen	50
2.4.1	Komplexe Zahlen: Zahlentheoretischer Zugang	50
2.4.2	Komplexe Zahlen: Algebraischer Zugang	54

2 Algebraische Analysis 59

1	Funktionen einer unabhängigen Variablen	60
1.1	Potenzen und Wurzeln	61
1.2	Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra	65
1.3	Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegung	69
1.4	Transzendente Funktionen	71
1.4.1	Vorbemerkungen	71
1.4.2	Definitionen und Formeln transzendenter Funktionen für $p > 2$	71
1.4.3	Algebraische Eigenschaften	74
1.4.4	Analytische Eigenschaften	81
1.4.5	Reelle transzendente Funktionen für $p > 2$	84
1.4.6	Umkehrfunktionen transzendenter Funktionen für $p > 2$	91
1.4.7	Transzendente Funktionen für $p = 2$	94
2	Differenzial- und Integralrechnung reeller Funktionen	96
2.1	Differenzialrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen...	96
2.1.1	Stetigkeit	96
2.1.2	Differenzen- und Differenzialquotienten	97
2.1.3	Elementare Anwendungen der Differenzialrechnung	101
2.1.4	Ableitung elementarer Funktionen	104
2.1.4.1	Algebraische Funktionen	104
2.1.4.2	Transzendente Funktionen	106
2.2	Integralrechnung von Funktionen einer unabhängigen Variablen	108
2.2.1	Definition des Integrals	108
2.2.2	Hauptsätze der Integralrechnung	110
2.3	Ausblick auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	111
3	Folgen und Reihen	114
3.1	Folgen und Reihen	114
3.2	Polynome, Polynomringe und Potenzreihen	118
4	Komplexe Analysis (Funktionentheorie)	123
4.1	Grundbegriffe.....	124
4.2	Differenziation komplexer Funktionen und Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen für $p > 2$	130
4.3	Integration im Komplexen für $p > 2$	135

4.3.1	Komplexe Kurvenintegrale	135
4.3.2	Cauchy'scher Integralsatz und Folgerungen	138
4.3.3	Residuen und Residuensatz	143
4.4	Differenziation und Integration im Komplexen für $p = 2$	148

3 Lineare Algebra 153

1	Vektorräume und Vektoren	154
1.1	Definitionen	154
1.2	Skalarprodukt	156
1.3	Strukturerhaltende Abbildungen: Morphismen	159
1.4	Matrizen	161
2.1	Matrizenalgebra	161
2.2	Determinanten	164
2.3	Matrixinversion	165
2.4	Spezielle Matrizen	168
3	Vektoren und Matrizen: Lineare Gleichungssysteme ..	170
3.1	Reguläre Gleichungssysteme	170
3.2	Singuläre Gleichungssysteme und allgemeines Lösungsverhalten	172
4	Eigenwertprobleme ..	174
4.1	Definitionen	174
4.2	Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms	175
4.3	Eigenvektoren und Eigenräume	177
4.4	Spezialfälle bestimmter Matrizen	179
4.5	Drehmatrizen	182
4.6	Jordan'sche Normalform	187
4.6.1	Definition und Konstruktion der Jordan'schen Normalform	187
4.6.2	Eigenschaften der Jordan'schen Normalform	191
4.7	Satz von Cayley-Hamilton und Minimalpolynom	193
5	Matrizenfunktionen	196
5.1	Ersatzpolynom einer Matrixfunktion und seine Taylor'sche Summe... ..	196
5.2	Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus	201
5.2.1	Formeln	201
5.2.2	Berechnung der Matrixexponentialfunktion für $p > 2$	203
5.2.3	Berechnung des Matrixlogarithmus für $p > 2$	209
5.2.4	Berechnung der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus für $p = 2$	211
5.3	Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion und des -logarithmus	214
6	Tensoralgebra und Tensoranalysis	217
6.1	Tensoralgebra	217
6.1.1	Einführung	217
6.1.2	Tensoren zweiter Stufe	219
6.1.3	Tensoren beliebiger Stufe und Rechenregeln	222

6.2	Tensoranalysis.....	223
6.2.1	Einführung	223
6.2.2	Christoffel'sche Symbole und kovariante Ableitung	226
4	Geometrie	231
1	Grundbegriffe der algebraischen Geometrie und der geometrischen Algebra .	232
1.1	Grundbegriffe der algebraischen Geometrie	232
1.2	Grundbegriffe der geometrischen Algebra .	234
2	Kegelschnitte: Kreise, Ellipsen und Hyperbeln	238
2.1	Einführung	238
2.2	Pythagoräische Gleichung und ihre Lösungen ..	240
2.3	Kreise und Ellipsen	242
2.4	Hyperbeln und Parabeln.....	249
2.5	Kreise und Hyperbeln in der pseudo-euklidischen Geometrie	254
3	Kugeln, Hyperkugeln und Hyperboloide	258
3.1	Zahl der Punkte von n -dimensionalen Kugeln und Hyperboloiden	259
3.2	Graphische Darstellung von Kugeln und Hyperboloiden der Dimension 3 .	266
3.3	Zahl der Kreise in Kugeln und Hyperboloiden	272
3.4	Weitere Ergebnisse und Aspekte n -dimensionaler Kugeln und Hyperboloide	275
3.5	Hyperkugeln in der Charakteristik $p = 2$	276
4	Symplektische Geometrie und Spinoren	278
4.1	Spinoren und Spinoralgebra	278
4.2	Spinoren, Quaternionen und 4-Vektoren	282
4.3	Zusammenhang der Gruppen $SU(2; \mathbb{F}_{\mathbb{C}})$ und $SO(3, \mathbb{F}_{\mathbb{R}})$	285
5	Differenzialgeometrie	289
5.1	Differenzialgeometrie der Raumkurven	289
5.1.1	Definitionen und die Formeln von Frenet.....	289
5.1.2	Vollständiges Invariantensystem der Raumkurven	295
5.2	Flächen und Flächenkurven	304
5.3	Innere Geometrie der Flächen	309
5.3.1	Geodatische Krümmung und geodatische Linien ..	309
5.3.2	Normal- und Hauptkrümmungen	312
5	Algebren	315
1	Einführung: Mannigfaltigkeiten.....	316
1.1	Topologische Grundbegriffe und Mannigfaltigkeiten .	316
1.2	Tangentialräume und Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten .	320

2	Lie-Gruppen und -Algebren	323
2.1	Lie-Gruppen	323
2.1.1	Definitionen und die 1-Parametergruppe-Untergruppe	323
2.1.2	Klassische Lie-Gruppen	326
2.2	Lie-Algebren	329
2.2.1	Definitionen und Eigenschaften von Lie-Algebren	329
2.2.2	Algebraischer Zugang zu Lie-Algebren	331
2.2.3	Klassische Lie-Algebren	334
3	Grassmann-Algebra und die Anwendung auf den Differenzialformenkalkül	335
3.1	Grassmann Algebra	335
3.2	Differenzialformenkalkül	340
3.2.1	Außere Differenziation und die Operatoren der Vektoranalysis	341
3.2.2	Integration von Differenzialformen und Integralsatze	344
3.2.3	Anwendung von Differenzialformen auf die Maxwell'schen Gleichungen	347
4	Clifford-Algebren	349
4.1	Definitionen	349
4.2	Spezielle Clifford-Algebren	351
4.3	Pauli- und Dirac-Matrizen: Die Algebren $Cl_{0,2}$ und $Cl_{1,3}$ in der Charakteristik 0	353
4.3.1	Pauli-Matrizen	353
4.3.2	Dirac-Matrizen	355
4.4	Quaternionen, Pauli- und Dirac-Matrizen über endlichen Körpern	356
4.4.1	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p > 2$	357
4.4.2	Quaternionen und Pauli-Matrizen für $p = 2$	361
4.4.3	Dirac-Matrizen für $p > 2$	363
6	Anwendungen endlicher Körper in der Systemtheorie	367
1	Systemtheorien in der Charakteristik 0	368
1.1	Definitionen	368
1.2	Lineare zeitkontinuierliche Systemtheorien	370
1.2.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie	370
1.2.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie	373
1.3	Lineare zeitdiskrete Systemtheorien	377
1.3.1	Lineare zeitabhängige Systemtheorie	377
1.3.2	Lineare zeitunabhängige Systemtheorie	378
2	Systemtheorien in der Charakteristik p	381
2.1	Automaten und zeitinvariante Systeme	381
2.1.1	Automaten	381
2.1.2	Lineare zeitinvariante Systeme	382
2.1.2.1	\mathcal{A} -Transformation	382
2.1.2.2	Lineare zeitinvariante Systeme	390

2.2	Lösung der homogenen Gleichung	393
2.2.1	Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 0$	393
2.2.2	Struktur des Zustandsraumes für den Eigenwert $\lambda = 1$..	398
2.2.3	Struktur des Zustandsraumes für die Eigenwerte $\lambda \neq 0, 1$	400
2.2.4	Allgemeiner Fall	405
2.2.5	Stabilitätsverhalten von Systemen	406
2.3	Lösung der inhomogenen Gleichung	408
2.3.1	Autonome Systeme	409
2.3.2	Ausblick auf nicht-autonome Systeme.....	417

7 Formulierung physikalischer Theorien über endlichen Körpern 429

1	Klassische und relativistische Mechanik	430
1.1	Klassische Mechanik in der Charakteristik p	431
1.1.1	Elementare Variationsrechnung	431
1.1.2	Die Prinzipien von d'Alembert und Hamilton	434
1.1.3	Lagrange'sche und Hamilton'sche Gleichungen	435
1.1.3.1	Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art	435
1.1.3.2	Ableitung der Hamilton'schen Gleichungen	437
1.1.3.3	Kanonische Transformation der Hamilton'schen Gleichungen und Poisson'sche Klammern	439
1.2	Relativistische Mechanik in der Charakteristik p	441
1.2.1	Minkowski-Raum und Lorentz-Transformation	441
1.2.2	Relativistische Kinematik	443
1.2.3	Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt	446
1.3	Systemtheoretische Aspekte	448
2	Klassische und relativistische Elektrodynamik	450
2.1	Klassische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$	451
2.1.1	Maxwell'sche Gleichungen und Erhaltungssätze.. ..	451
2.1.2	Entkopplung der Maxwell'schen Gleichungen.....	452
2.1.3	Lösungen der Wellengleichungen	454
2.2	Relativistische Elektrodynamik in der Charakteristik $p > 2$	456
2.2.1	Definition des elektromagnetischen Feldtensors	456
2.2.2	Kovarianz der Maxwell'schen Gleichungen	458
2.2.3	Energie-Impuls-Tensor	459
2.3	Elektrodynamik in der Charakteristik $p = 2$	462
3	Klassische und relativistische Quantenmechanik	466
3.1	Quantenmechanik	466
3.1.1	Axiomatische Grundlagen der Quantenmechanik	466
3.1.2	Darstellungen von Hilbert-Vektoren und Operatoren	469
3.1.3	Klassische und quantenmechanische Kommutator-Regeln	471
3.1.4	Heisenberg'sche Unschärferelationen	473
3.1.5	Invarianzeigenschaften, Schrödinger- und Heisenberg-Bild	475
3.1.6	Harmonischer Oszillator	478

3.2	Relativistische Quantenmechanik: Dirac-Theorie	481
3.2.1	Dirac-Gleichung in der Charakteristik 0	481
3.2.2	Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p > 2$	484
3.2.2.1	Eigenschaften der Dirac-Gleichung	484
3.2.2.2	Lösungen der Dirac-Gleichung für ebene Elektronenwellen	488
3.2.3	Dirac-Gleichung in der Charakteristik $p = 2$	490
Anhang A: Tabellen		493
Literaturverzeichnis		499
Sachverzeichnis		507