

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Definitionen	1
1.1.1	Komplexe Zahlen	1
1.1.2	Schlüsselkonzept: Analytizität	2
1.1.3	Konturintegrale	3
1.2	Der Cauchy'sche Integralsatz	5
1.2.1	Formulierung und Beweis	5
1.2.2	Konturdeformationen	6
1.2.3	Cauchy'sche Integralformel	7
1.2.4	Taylor- und Laurent-Entwicklungen	9
1.2.5	Satz von Liouville	13
1.2.6	Isolierte Singularitäten und Residuen	14
1.3	Konturintegration von analytischen Zweigen	21
1.3.1	Funktionen mit Verzweigungspunkten	21
1.3.2	Integrale der Form $\int_0^\infty x^{\alpha-1} Q(x) dx$	22
1.3.3	Hauptwertintegrale	24
1.3.4	Integrale entlang endlicher Schnitte in \mathbb{C}	27
1.3.5	Spezialfall der Pole im endlichen Schnitt	33
1.3.6	Analytische Fortsetzung	37
1.4	Fourier-Transformation	40
1.4.1	Definition, Umkehrung und Dirac'sche δ -Funktion	40
1.4.2	Analytische und asymptotische Eigenschaften	47
1.4.3	Laplace-Transformation	57
1.5	Übungsaufgaben	60
1.6	Lösungen	63
2	Hypergeometrische Reihen und ihre Anwendungen	65
2.1	Die Gamma-Funktion	65
2.1.1	Definition und Funktionalgleichung	65
2.1.2	Analytische Eigenschaften	66
2.1.3	Der Ergänzungssatz	68

2.1.4	Stirling-Formel	69
2.1.5	Euler'sches Integral erster Gattung	70
2.1.6	Legendre'sche Verdopplungsformel	70
2.1.7	Produktdarstellung der Gamma-Funktion	71
2.2	Mellin-Transformation	75
2.3	Die Reihenentwicklung	79
2.3.1	Konturintegraldarstellung von Hankel	82
2.4	Hypergeometrische Reihen: Grundeigenschaften	83
2.4.1	Definition und Konvergenzeigenschaften	83
2.4.2	Spezialfälle	84
2.4.3	Integraldarstellung und Gauss'sches Summationstheorem .	88
2.5	Differentialgleichungen	90
2.5.1	Hypergeometrische Gleichung: Lösungen in der Nähe von $z = 0$	90
2.5.2	Die Lösung bei $z = 1$ und ihre Relation zur Lösung in der Nähe von $z = 0$	91
2.5.3	Das Integral von Barnes	93
2.6	Kummer'sche Funktion (konfluente hypergeometrische Reihe) .	94
2.6.1	Konfluente hypergeometrische Differentialgleichung . . .	94
2.6.2	Integraldarstellung	96
2.6.3	Spezialfälle	98
2.7	Verallgemeinerte hypergeometrische Reihe	100
2.8	Beispiele aus der mathematischen Physik	102
2.8.1	Impulsverteilung in wechselwirkenden Systemen	102
2.8.2	Die eindimensionale Schrödinger-Gleichung	104
2.8.3	Probleme, die sich auf eine 1D-Schrödinger-Gleichung abbilden lassen	108
2.9	Übungsaufgaben	110
2.10	Lösungen	114
3	Integralgleichungen	117
3.1	Einführung	117
3.1.1	Klassifikation der Integralgleichungen	117
3.1.2	Die Resolventenmethode	119
3.2	Produktkerne der Form $k(x, y) = k(xy)$	121
3.2.1	Die Fourier-Integralgleichung	121
3.2.2	Reduktion auf ein halbunendliches Integrationsgebiet . .	123
3.2.3	Die Integralgleichung von Fox	125
3.3	Differenzkerne, nicht-singulärer Fall	125
3.3.1	Unendliches Integrationsgebiet	126
3.3.2	Die Wiener-Hopf-Methode	131
3.3.3	Gleichungen mit exponentiellen Kernen	157
3.4	Singuläre Integralgleichungen	168
3.5	Abel'sche Integralgleichung	183

3.6 Übungsaufgaben	187
3.7 Lösungen	189
4 Orthogonale Polynome	193
4.1 Einführung	193
4.2 Orthogonalitätsrelationen	196
4.3 Eindeutigkeit	200
4.4 Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren	201
4.5 Rodrigues-Formel	203
4.6 Erzeugende Funktion	207
4.7 Rekursionsrelationen	213
4.8 Integraldarstellung der orthogonalen Polynome	215
4.9 Zusammenhang mit den homogenen Integralgleichungen	218
4.10 Orthogonale Polynome und hypergeometrische Funktionen	221
4.11 Übungsaufgaben	222
4.12 Lösungen	225
5 Ausführliche Lösungen der Übungsaufgaben	229
5.1 Kapitel 1	229
5.2 Kapitel 2	242
5.3 Kapitel 3	255
5.4 Kapitel 4	269
Literatur	289
Sachverzeichnis	291