
Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Ein Beispiel	1
2	Mengen und Mengensysteme	5
2.1	Elementare Mengenlehre	5
2.2	Algebren und σ -Algebren	10
2.3	Semiringe, Ringe und σ -Ringe	12
2.4	Erzeugte Systeme	18
2.5	Monotone Systeme und Dynkin-Systeme	21
3	Mengenfunktionen	25
3.1	Inhalte und Maße auf Semiringen	25
3.2	Die Fortsetzung von Inhalten und Maßen auf Ringe	28
3.3	Eigenschaften von Inhalten und Maßen	30
3.4	Additionstheorem und verwandte Sätze	33
4	Fortsetzung von Maßen auf σ-Algebren	37
4.1	Äußere Maße und Carathéodory-Messbarkeit	37
4.2	Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz	39
4.3	Vervollständigung	42
5	Unabhängigkeit	47
5.1	Die durch ein Ereignis bedingte Wahrscheinlichkeit	47
5.2	Unabhängigkeit von Ereignissystemen	49
6	Lebesgue-Stieltjes-Maße	53
6.1	Definition und Regularität	53
6.2	Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$	55
6.3	Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$	57
6.4	Diskrete und stetige Verteilungsfunktionen	59
6.5	Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$	62

6.6	Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}^k$	65
6.7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$	72
6.8	Das k -dimensionale Lebesgue-Maß	77
7	Messbare Funktionen - Zufallsvariable	83
7.1	Definition und Eigenschaften	83
7.2	Erweitert reellwertige Funktionen	86
7.3	Treppenfunktionen	88
7.4	Baire-Funktionen	90
7.5	Subsigmaalgebren	91
7.6	Unabhängige Zufallsvariable	95
7.7	Verallgemeinertes Null-Eins-Gesetz von Kolmogoroff	98
7.8	Cantor-Menge und nichtmessbare Mengen	99
7.9	Konvergenzarten	101
8	Die Verteilung einer Zufallsvariablen	109
8.1	Das induzierte Maß	109
8.2	Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen	110
8.3	Die inverse Verteilungsfunktion	113
8.4	Maßtreue Abbildungen	117
9	Das Integral - Der Erwartungswert	123
9.1	Definition des Integrals	123
9.2	Konvergenzsätze	130
9.3	Das unbestimmte Integral	136
9.4	Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgues-Integral	139
9.5	Das Integral transformierter Funktionen	143
10	Produkträume	153
10.1	Die Produktsigmaalgebra	153
10.2	Der Satz von Fubini	157
10.3	Maße auf unendlich-dimensionalen Produkträumen	169
10.4	Null-Eins-Gesetz von Hewitt- Savage	175
10.5	Stetige Zufallsvariable	177
10.6	Die Faltung	181
11	Zerlegungssätze und Integraldarstellung	187
11.1	Die Hahn-Jordan-Zerlegung	187
11.2	Die Lebesgue-Zerlegung	190
11.3	Der Satz von Radon-Nikodym	191
12	Integral und Ableitung	195
12.1	Funktionen von beschränkter Variation	195
12.2	Absolut stetige Funktionen	197
12.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	202

13	L_p- Räume	207
13.1	Integralungleichungen	207
13.2	Vollständigkeit der L_p -Räume	211
13.3	Gleichmäßige Integrierbarkeit	213
13.4	Der Dualraum zu $L_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$	220
14	Bedingte Erwartungen	225
14.1	Der Satz von der vollständigen Erwartung	225
14.2	Die durch eine σ -Algebra bedingte Erwartung	228
14.3	Reguläre, bedingte Wahrscheinlichkeiten	235
15	Gesetze der großen Zahlen	241
15.1	Die Varianz und andere Momente	241
15.2	Schwache Gesetze der großen Zahlen	246
15.3	Starke Gesetze der großen Zahlen	248
15.4	Ergodensätze	256
16	Martingale	263
16.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	263
16.2	Transformation von Submartingalen	267
16.3	Konvergenzsätze für Submartingale	269
16.4	Optionales Stoppen - optionale Auswahl	278
16.5	Submartingalungleichungen	284
17	Verteilungskonvergenz und Grenzwertsätze	287
17.1	Schwache Konvergenz	287
17.2	Der klassische zentrale Grenzwertungssatz	291
17.3	Schwache Kompaktheit	294
17.4	Charakteristische Funktionen	297
17.5	Der Grenzwertungssatz von Lindeberg-Feller	307
A	Anhang	315
A.1	Diagonalisierungsverfahren und Auswahlaxiom	315
A.2	Reihen	316
A.3	Topologie	321
A.4	Analysis	326
A.5	Konvexe Mengen und Funktionen	328
A.6	Trigonometrie	332
A.7	Komplexe Analysis	334
A.8	Funktionalanalysis	337
	Literaturverzeichnis	341
	Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	343
	Stichwortverzeichnis	347