
Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Voraussetzungen	1
1.1 Mengen	2
1.1.1 Mengen und ihre Elemente	2
1.1.2 Mengen und ihre Mächtigkeit	4
1.1.3 Gleichheit von Mengen und Teilmengen	6
1.1.4 Verknüpfungen von Mengen	7
1.2 Grundbegriffe des logischen Schließens	10
1.2.1 Implikationen und die Äquivalenz von Aussagen	11
1.2.2 Mathematische Logik und Alltagslogik	11
1.2.3 Einige (wenige) Regeln des mathematischen Beweisens und logischen Schließens	12
1.2.4 Implikationen und Beweisverfahren	13
1.2.5 Quantoren	16
1.3 Übungsaufgaben	17
2 Natürliche Zahlen	19
2.1 Rechnen mit natürlichen Zahlen	20
2.1.1 Addition und Subtraktion	20
2.1.2 Das Prinzip des kleinsten Elements	21
2.1.3 Multiplikation und Teilbarkeit	24
2.1.4 Die Goldbach'sche Vermutung	27
2.2 Die Idee der unendlichen Mengen	28
2.2.1 Gibt es unendliche Mengen?	28
2.2.2 Hilberts Hotel	29
2.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion	30
2.3.1 Beweisen durch vollständige Induktion	30
2.3.2 Definition durch Induktion: Das Produkt natürlicher Zahlen	36
2.3.3 Definition durch Induktion: n Fakultät	37
2.3.4 Definition durch Induktion: Die Fibonacci-Zahlen	38
2.3.5 Geometrische Summenformel	41
2.4 Der binomische Lehrsatz	44

2.5	Ein Exkurs über Evidenz und Wahrheit.	50
2.6	Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen.	53
2.6.1	Was sind die natürlichen Zahlen?	53
2.6.2	Die Peano-Axiome.	55
2.6.3	Modelle zu den Peano-Axiomen.	58
2.6.4	Mengentheoretische Begründung von \mathbb{N}	59
2.7	Übungsaufgaben.	60
3	Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme	63
3.1	Beispiele für Zahldarstellungen.	63
3.2	Division mit Rest.	67
3.3	Die Kreuzprobe.	71
3.3.1	Das Prinzip der Kreuzprobe.	72
3.3.2	Die Begründung der Kreuzprobe.	73
3.4	Zahldarstellung in g-adischen Systemen.	74
3.5	Rechnen in Stellenwertsystemen.	78
3.5.1	Addition und Subtraktion in g-adischen Systemen.	78
3.5.2	Multiplikation und Division in g-adischen Systemen.	81
3.6	Übungsaufgaben.	84
4	Teilbarkeit und Primzahlen	85
4.1	Teilbarkeit in \mathbb{N}	85
4.2	Primzahlen.	89
4.2.1	Das Sieb des Eratosthenes.	90
4.2.2	Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen.	91
4.2.3	Primzahlzwillinge, Primzahltripel, Primzahlformeln.	94
4.2.4	Primfaktorzerlegung.	95
4.3	Teilbarkeit und Primfaktoren in \mathbb{Z}	100
4.4	Übungsaufgaben.	108
5	Teiler und Vielfache	111
5.1	Der größte gemeinsame Teiler in \mathbb{Z}	111
5.2	Der euklidische Algorithmus.	117
5.3	Das kleinste gemeinsame Vielfache in \mathbb{Z}	122
5.4	Vollkommene Zahlen.	125
5.5	Übungsaufgaben.	132
6	Ganze Zahlen	133
6.1	Definition der ganzen Zahlen.	135
6.2	Rechnen mit ganzen Zahlen.	141
6.3	Die isomorphe Einbettung der natürlichen in die ganzen Zahlen.	146
6.4	Die Anordnung der ganzen Zahlen.	151
6.5	Übungsaufgaben.	153

7	Restklassen	155
7.1	Kongruenzen	156
7.2	Verknüpfungen von Restklassen	161
7.2.1	Der Ring \mathbb{Z}_m der Restklassen modulo m	168
7.3	Teilbarkeitsregeln	170
7.3.1	Quersummenregeln	170
7.3.2	Endstellenregeln	173
7.3.3	Zusammengesetzte und andere Teilbarkeitsregeln	175
7.4	Pseudozufallszahlen und Kongruenzen	175
7.4.1	Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen	176
7.5	Übungsaufgaben	178
8	Lineare und quadratische Kongruenzen	181
8.1	Lineare Kongruenzen und ihre Lösbarkeit	181
8.2	Anwendungen linearer Kongruenzen	186
8.3	Sätze von Euler	189
8.4	Chinesischer Restsatz	193
8.5	Quadratische Kongruenzen	195
8.6	Übungsaufgaben	205
9	Teilbarkeit in Integritätsringen	207
9.1	Integritätsringe	208
9.2	Einheiten, Teiler und assoziierte Elemente	213
9.3	Primelemente	221
9.4	Nebenklassen, Ideale und Hauptidealringe	228
9.5	Eigenschaften von Hauptidealringen	235
9.6	Übungsaufgaben	240
10	Anwendungen der elementaren Zahlentheorie	241
10.1	Verwaltung von Lagerbeständen	242
10.1.1	EAN (European Article Number)	242
10.1.2	ISBN (International Standard Book Number)	244
10.2	Kryptographie	247
10.2.1	Einheiten in \mathbb{Z}_{pq}	252
10.2.2	Grundlagen des RSA-Verfahrens	253
10.2.3	Praktische Zahlenkodierung	254
10.2.4	Ein Beispiel zur Kodierung und Dekodierung	255
10.2.5	Praktische Textkodierung	256
10.3	Übungsaufgaben	260
11	Rationale Zahlen	261
11.1	Definition der rationalen Zahlen	262
11.2	\mathbb{Q} ist eine große Menge: Dezimaldarstellung	271

11.3	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Abzählbarkeit	279
11.3.1	Abzählen nach der Summe von Zähler und Nenner	280
11.3.2	Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen	283
11.4	\mathbb{Q} ist eine kleine Menge: Rationale und reelle Zahlen	284
11.5	Kettenbrüche	289
11.5.1	Darstellung von rationalen Zahlen durch Kettenbrüche	292
11.5.2	Darstellung von irrationalen Zahlen durch Kettenbrüche	293
11.6	Übungsaufgaben	294
12	Reelle Zahlen	297
12.1	Konvergenz	299
12.2	Die Erweiterung von \mathbb{Q} auf \mathbb{R}	309
12.3	Nachweis des Grenzwerts	315
12.4	Übungsaufgaben	321
13	Komplexe Zahlen	323
13.1	Definition der komplexen Zahlen	324
13.1.1	Die Zahlenebene	325
13.1.2	Polarkoordinaten	326
13.2	Addition und Multiplikation	329
13.3	Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen	331
13.4	Rechnen mit komplexen Zahlen	334
13.5	Quadratische Gleichungen	338
13.6	Gleichungen höherer Ordnung	342
13.7	Übungsaufgaben	347
14	Zahlentheoretische Funktionen	349
14.1	Begriffsbestimmung	350
14.2	Primzahlverteilung	351
14.3	Die Euler'sche φ -Funktion	352
14.4	Die Riemann'sche ζ -Funktion	359
14.4.1	Ungerade natürliche Zahlen und die Riemann'sche ζ -Funktion	361
14.4.2	Zusammenhänge der Riemann'schen ζ -Funktion mit den Primzahlen	361
14.5	Übungsaufgaben	364
	Lösungshinweise	365
	Lösungen	379
	Literaturverzeichnis	421
	Sachverzeichnis	423