

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Zum Gebrauch dieses Buches

1

Teil 1

Zehn einfache Prüfbeispiele zur Verifikation von Software-Ergebnissen

Beispiel 1	Einachsige Biegung mit Druck Kragstütze mit aufgesetztem Koppelträger	11
Beispiel 2	Durchschlagprobleme – Analyse nach Th.II.O. unzulässig Unsymmetrisches v. MISES-Fachwerk mit geringem Stichmaß	16
Beispiel 3	Doppelbiegung – ein simpler Fall? Gabelgägerter Einfeldträger mit Einzellasten F_y und F_z in Feldmitte	20
Beispiel 4	Planmäßig zentrische Druckbeanspruchung – Biegeknicken nach zwei Richtungen, Drillknicken Über vier Geschosse durchlaufende, planmäßig zentrisch beanspruchte Stütze mit unterschiedlichen Randbedingungen in y - und z -Richtung Beispiel 4a: Gabellagerung in jedem Geschoss	26
	Beispiel 4b: Gabellagerung nur an den Enden der Stütze	29
Beispiel 5	Gekoppelte Beanspruchung in der System-Ebene und senkrecht zur Ebene Ebenes Rautenfachwerk mit biege- und torsionssteifen Knoten	33
Beispiel 6	Biegedrillknicken ohne Normalkraft – ein Standard-Beispiel aus der Literatur Gabelgägerter Einfeldträger mit Streckenlast und sinusförmiger Vorkrümmung	37
Beispiel 7	Biegedrillknicken mit Normalkraft Abgespannter Träger mit Kragarm Beispiel 7a: Anschluss der Abspaltung im Schwerpunkt Beispiel 7b: Anschluss der Abspaltung am Obergurt	40
Beispiel 8	Zustandslinien der Torsionsmomente – Verlauf an Lasteinleitungspunkten Tordierter Balken mit Längs- und Querlasten	47

Beispiel 9	Torsion wölbfreier Querschnitte – für Software unerwartet problematisch Tordierter Kragträger	50
Beispiel 10	Wie genau wird die nichtlineare Verformungsgeometrie erfasst? Zwei Prüfbeispiele mit ebener Beanspruchung Beispiel 10a: Biegeträger mit beidseitig unverschieblichen Lagern Beispiel 10b: Kragträger mit Lastmoment am freien Ende	53 53 55

Teil 2

Nichtlineare Stabtheorie großer Verformungen bei räumlicher Beanspruchung

Theoretische Grundlagen
und weitere Prüfbeispiele

1	Einleitung	61
2	Theorie II. und III. Ordnung – die großen Missverständnisse	
2.1	Vorbemerkungen	62
2.2	Verformungsgeometrie	63
2.3	Gleichgewicht am verformten System	64
2.4	Einfluss der Normalkraft auf die Verdrillung	66
2.5	Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion und der sekundären Schubverformungen	68
2.6	Asymptotisches Verhalten und Genauigkeit	72
2.7	Durchschlagprobleme	75
2.7.1	Allgemeines	75
2.7.2	Beispiel: Stahlträger einer pagodenförmigen Kuppel	80
2.8	Klassifizierung	83
2.9	Superposition	86
2.10	Theorie III. Ordnung	86
2.11	DIN 18800 / EC3: Nachweis am Gesamtsystem	88
2.12	Zusammenfassung	90

3	Torsionstheorie II. Ordnung: Wölbkrafttorsion mit Normalkraft	
3.1	Vorbemerkungen	92
3.2	Erläuterung der Problematik an einem Beispiel	93
3.3	Herleitung des Torsionsmomenten-Anteils M_{xN}	95
3.4	Klärung für den Sonderfall $\vartheta' = \text{const}$	98
3.4.1	Belastung durch M_T und N (inhomogener Fall)	98
3.4.2	Drillknicken (homogener Fall)	101
3.4.3	Spannungen	102
3.4.4	Baustatische Relevanz	103
3.5	Allgemeiner Fall $\vartheta' \neq \text{const}$	104
3.5.1	Problemstellung	104
3.5.2	Übergangsbedingungen an Lasteinleitungsstellen innerhalb eines Trägers	105
3.5.3	Bedingungen am Rand eines Trägers	108
3.5.4	Einleitung von M_T bzw. F_x : Zusammenfassung	108
3.5.5	Drillknicken	109
3.5.5.1	DK-Last des beidseitig gabelgelagerten Trägers	109
3.5.5.2	Abgrenzung Drillknicken / Biegeknicken (DK / BK)	110
3.5.5.3	Einfluss des Wölbwiderstands auf die Drillknicklast	115
3.5.5.4	Last-Verdrillungskurven und asymptotisches Verhalten	117
4	Torsionstheorie großer Verformungen	
4.1	Vorbemerkungen	118
4.2	Helix-Torsion: der Schraubenlinien-Effekt	118
4.2.1	Geometrie der Schraubenlinie (Helix)	118
4.2.2	Helix-Normalspannungen σ_{xH} und Helix-Torsionsmoment M_{xH}	120
4.2.3	Ermittlung der Helix-Flächenmomente	124
4.2.4	Helix-Schubspannungen τ_{xH}	127
4.3	Torsion mit Normalkraft: Sonderfall $\vartheta' = \text{const}$	129
4.3.1	Gleichgewicht, Differenzialbeziehung, Drillknicken	129
4.3.2	Verformungen und Zustandslinien	132
4.3.3	Last-Verdrillungskurven	132
4.3.4	Analytische Lösung	136
4.3.5	Ausnutzungsgrad des Querschnitts und baustatische Relevanz	142
4.4	Torsion mit Normalkraft: allgemeiner Fall $\vartheta' \neq \text{const}$	147
4.4.1	Gleichgewicht, Differenzialbeziehung, Drillknicken	147

4.4.2	Zustandslinien	147
4.4.3	Last-Verdrillungskurve	150
4.4.4	Spannungen und Querschnittsausnutzung	154
4.5	Analogiebetrachtungen zu M_{xN} und M_{xH} an zwei „Makro-Systemen“	158
4.5.1	Analogiebetrachtung zu M_{xN}	158
4.5.2	Analogiebetrachtung zu M_{xH}	162
5	Allgemeine Stabtheorie großer räumlicher Verschiebungen und Drehungen	
5.1	Vorbemerkungen	166
5.2	Grundlagen und Annahmen	167
5.3	Kinematik des Stabraums	169
5.3.1	Annahmen und Voraussetzungen zur Beschreibung der Deformation	169
5.3.2	Klassische Kinematik: Drehung mit „Winkelgrößen“	170
5.3.2.1	Rotation um eine schiefe Raumachse	171
5.3.2.2	Rotation um raumfeste Koordinatenachsen	177
5.3.2.3	Rotation um Folgeachsen (Kardanwinkel)	178
5.3.2.4	Semitangentielle Drehungen	179
5.3.2.5	Bewertung der Verwendung von „Winkelgrößen“	179
5.3.3	Drehungen, ausgedrückt durch Verschiebungen	180
5.3.3.1	Basisvektoren und Ableitungen	182
5.3.3.2	Drehtensor	183
5.4	Potenzial des elastischen Stabes	184
5.4.1	Einführung von Relativ- und Gesamtkinematen	184
5.4.2	Verschiebungsansatz	186
5.4.3	Dehnungs- und Verzerrungsmaß	188
5.4.3.1	Allgemeine Herleitung für den Stabbaum	188
5.4.3.2	Vergleich mit den „Ingenieurdehnungen“	192
5.4.4	Elastizitätsgesetz	193
5.4.5	Potenzial der inneren Kräfte	194
5.4.5.1	Potenzialanteil aus Längsdehnungen: Π_1^i	194
5.4.5.2	Darstellung der Potenzialterme aus Längsdehnungen	196
5.4.5.3	Potenzialanteil aus Schubverzerrungen: Π_2^i	202
5.5	Elementkräfte und Element-Steifigkeitsmatrizen (Relativkinematik)	204
5.5.1	Variation (Ableitung) nach Relativkinematen	204
5.5.2	Transformation der Relativkinematen auf Gesamtkinematen	205

5.6	Gesamtstruktur und globales Gleichgewicht	205
5.6.1	Gelenke und lokale Randbedingungen für Verwölbungen	205
5.6.2	Transformation von Komponenten auf globale Basen	206
5.6.2.1	Transformation von Knotenverschiebungen u, v, w	207
5.6.2.2	Transformation von Knotendrehgrößen w_2, u_3, u_2	207
5.6.3	Globales Gleichgewicht und Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	208
5.7	Beispiel: St. VENANT-Torsion mit Normalkraft	208
5.7.1	Allgemeines	208
5.7.2	Verschiebungen und Verzerrungen des Stabes	209
5.7.3	Verschiebungen und Verzerrungen bei St. VENANT-Torsion	210
5.7.4	Gleichgewicht nach der energetischen Methode	213
5.7.4.1	Potenzialanteil und Variation aus Längsdehnungen	213
5.7.4.2	Potenzialanteil und Variation aus Schubverzerrungen	217
5.8	Beispiel: Große Drehung einer Federplatte	218
5.8.1	Potenzial und Gleichgewicht	219
5.8.2	Berechnung der Momente: direkte Methode	220
5.8.3	Berechnung der Momente über „Winkelgrößen“	222
5.8.3.1	Berechnung der „Drehwinkel“	222
5.8.3.2	Kontrolle der Drehmatrix T	222
5.8.3.3	Ermittlung der Momente	223
5.9	Zur Einleitung von Momenten mit richtungstreuer bzw. zirkulatorischer Charakteristik	225
5.9.1	Änderung des Potenzials der äußeren Kräfte	226
5.9.2	Beispiel zur Variation des Potenzials gem. 5.9.1	227
5.9.3	Beispiel: Kragträger mit zirkulatorischer bzw. nicht-zirkulatorischer Last	230
5.10	Praktische Anwendungsbeispiele	232
5.10.1	Durchlaufträger mit Doppelbiegung	232
5.10.1.1	Systeme und Belastung	232
5.10.1.2	Ergebnisse für System 1 (3 Gabellager)	234
5.10.1.3	Ergebnisse für System 2 (2 Gabellager)	241
5.10.2	Balken mit Kragarm und exzentrischer Einzellast	243
5.10.3	Schlussfolgerungen aus den Beispielen	249
6	Einfluss der Güte der Stabtheorie auf das Konvergenzverhalten	
6.1	Einführung	251
6.2	Potenzial für einachsige Biegung mit Druck	252
6.3	Lineare Kräfte und Steifigkeitsmatrix	252

6.4	Nichtlineare Kräfte und Steifigkeitsmatrix	253
6.4.1	Variante 1: Berücksichtigung aller Terme, v linear	254
6.4.2	Variante 2: ohne Terme 4. Ordnung, v linear	255
6.4.3	Variante 3a: ohne Terme 4. Ordnung, v linear, N konstant	256
6.4.4	Variante 3b: ohne Terme 4. Ordnung, v kubisch, N konstant	257
6.5	Konvergenzverhalten und Bewertung	258
7	Zusammenfassung und Ausblick	260
Literatur und EDV-Programme		263
Sachverzeichnis		268