
Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

1	Einführendes Beispiel: Der unendliche Münzwurf	3
1.1	Übungen	11
2	Grundlagen der Maßtheorie	13
2.1	Mengensysteme	13
2.2	Mengenfunktionen	19
2.3	Fortsetzung eines Maßes	28
2.4	Eindeutigkeit und Dynkin-Systeme	33
2.5	Vollständigkeit	40
2.6	Das Lebesgue-Maß	43
2.7	Übungen	45
3	Messbare Abbildungen, Zufallsvariable	49
3.1	Messbare Abbildungen	49
3.2	Bildmaße und Zufallsvariable	58
3.3	Konvergenzarten	59
3.4	Übungen	61
4	Integration, Erwartungswert	65
4.1	Definition des Integrals	66
4.2	Vertauschung von Limes und Integral	79
4.3	Integration bzgl. Bildmaßen und Maßen mit Dichten	83
4.4	L^p -Räume	87
4.5	Riemann- und Lebesgue-Integral	94
4.6	Übungen	96

Teil II Unabhängigkeit und Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie

5	Unabhängigkeit	101
5.1	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	101
5.2	Definition und Eigenschaften der Unabhängigkeit	103
5.3	Produktmaße und der Satz von Fubini	108
5.4	Terminale Ereignisse	119
5.5	Übungen	122
6	Das starke Gesetz der großen Zahlen	127
6.1	Übungen	136
7	Schwache Konvergenz	139
7.1	Definition und Grundlagen	139
7.2	Relative Kompaktheit	150
7.3	Übungen	155
8	Charakteristische Funktionen	157
8.1	Definition und Grundlagen	157
8.2	Eindeutigkeit und Umkehrformeln	163
8.3	Der Konvergenzsatz	167
8.4	Übungen	173
9	Der zentrale Grenzwertsatz	175
9.1	Der eindimensionale Fall	175
9.2	Der mehrdimensionale Fall	177
9.3	Übungen	180

Teil III Abhängigkeit und stochastische Prozesse

10	Markov-Ketten	183
10.1	Definition und Beispiele	184
10.2	Rekurrenz und Transienz	191
10.3	Grenzverhalten irreduzibler Markov-Ketten	197
10.4	Übungen	206
11	Stochastische Prozesse: Grundlagen	209
11.1	Beispiele	209
11.2	Grundbegriffe	223
11.3	Konstruktion von stochastischen Prozessen	225
11.4	Prozesse mit stetigen Pfaden	238
11.5	Übungen	243

12	Die Radon-Nikodym Ableitung	245
12.1	Einführende Beispiele	246
12.2	Signierte Maße	248
12.3	Der Satz von Radon-Nikodym	253
12.4	Singuläre signierte Maße	264
12.5	Übungen	267
13	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Erwartung	271
13.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit bzgl. einer σ -Algebra	271
13.2	Bedingte Erwartung bzgl. einer σ -Algebra	278
13.3	Reguläre bedingte Verteilungen	287
13.4	Übungen	289
14	Martingale	291
14.1	Martingale mit diskreter Zeit: Grundlagen	291
14.2	Optional Sampling	298
14.3	Konvergenzsätze	306
14.4	Martingale mit allgemeiner Zeitmenge	316
14.5	Die quadratische Variation der Brown'schen Bewegung	325
14.6	Übungen	327
15	Messbare Prozesse	331
16	Markov-Prozesse	339
16.1	Grundlagen	339
16.2	Markov-Prozesse und Halbgruppen	340
16.3	Feller'sche Halbgruppen und Prozesse	352
16.4	Lévy-Prozesse	361
16.5	Übungen	363

Teil IV Grundlagen der stochastischen Analysis

17	Semimartingale und ihr stochastisches Integral	367
17.1	Das stochastische Integral von Prozessen von endlicher Variation	368
17.2	Vorbereitung des allgemeinen stochastischen Integrals	369
17.3	Lokale Martingale	374
17.4	Definition und Eigenschaften von Semimartingalen	377
17.5	Beispiele	380
17.6	Definition des stochastischen Integrals	382
17.7	Eigenschaften des stochastischen Integrals	387
17.8	Übungen	393

18	Die quadratische Variation und Kovariation	395
18.1	Existenz und Eigenschaften der quadratische Variation und Kovariation	395
18.2	Die Itô-Döblin-Formel	401
18.3	Der Satz von Girsanov	405
18.4	Anwendung auf die mathematische Theorie der Finanzmärkte	410
18.5	Übungen	414
	Lösungen einiger Übungsaufgaben	415
	Literatur	423
	Sachverzeichnis	425