
Inhaltsverzeichnis

1	Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können	1
1.1	Mengen	1
1.2	Äquivalenzrelationen	4
1.3	Abbildungen	7
1.4	Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?	13
1.5	Die Σ -Notation	18
1.6	Beweisprinzipien	20
1.7	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	22
2	Körper	29
2.1	Die Definition	29
2.1.1	Gesetze der Addition	29
2.1.2	Gesetze der Multiplikation	30
2.1.3	Distributivgesetz	30
2.2	Beispiele von Körpern	32
2.2.1	Der Körper der komplexen Zahlen	33
2.2.2	Der Quaternionenschiefkörper	36
2.2.3	Einige endliche Körper	40
2.2.4	Konstruktion eines Körpers mit vier Elementen	44
2.3	Automorphismen von Körpern	46
2.3.1	Die Definitionen	47
2.3.2	Der Körper der rationalen Zahlen	47
2.3.3	Der Körper der reellen Zahlen	50
2.3.4	Konjugiert-komplexe Zahlen	51
2.4	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	52
3	Vektorräume	59
3.1	Die Definition	59
3.2	Beispiele von Vektorräumen	61
3.2.1	Vektorräume mit Hilfe von Geometrie	61
3.2.2	Der Vektorraum K^n	62

3.2.3	Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen	63
3.2.4	Der Vektorraum aller unendlichen Folgen	64
3.2.5	Ein Vektorraum unendlicher Folgen	64
3.2.6	Vektorräume von Funktionen	64
3.2.7	Lösungen eines Gleichungssystems	65
3.2.8	Teilmengen einer Menge	65
3.2.9	Körper als Vektorräume	65
3.3	Elementare Theorie der Vektorräume	66
3.3.1	Der Begriff der Basis	67
3.3.2	Der Steinitzsche Austauschsatz	75
3.3.3	Der Dimensionssatz	83
3.3.4	Faktorräume	85
3.4	Zur Geschichte der linearen Algebra	92
3.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	94
4	Anwendungen von Vektorräumen	105
4.1	Lineare Gleichungssysteme	105
4.1.1	Begriffe und Fragen	105
4.1.2	Exkurs über Matrizen	106
4.1.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	111
4.1.4	Der Gaußsche Algorithmus	116
4.2	Affine Geometrie	122
4.2.1	Affine Räume	123
4.2.2	Unterräume	126
4.3	Codierungstheorie	129
4.3.1	Grundlegende Begriffe	129
4.3.2	Lineare Codes	133
4.4	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	139
5	Lineare Abbildungen	147
5.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	147
5.2	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	154
5.3	Der Homomorphiesatz	162
5.4	Der Dualraum	166
5.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	171
6	Polynomringe	177
6.1	Ringe	177
6.1.1	Gesetze der Addition	177
6.1.2	Gesetz der Multiplikation	178
6.1.3	Distributivgesetze	178

6.2	Was ist eigentlich x ?	179
6.3	Polynomdivision	187
6.4	Ideale von $K[x]$	192
6.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	195
7	Determinanten	203
7.1	Die Determinantenfunktion	203
7.2	Permutationen	207
7.3	Gerade und ungerade Permutationen	211
7.4	Die Leibnizsche Determinantenformel	218
7.5	Wie berechnet man eine Determinante?	222
7.6	Der Multiplikationssatz	233
7.7	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	236
8	Diagonalisierbarkeit	241
8.1	Einführung	241
8.2	Eigenvektoren und Eigenwerte	243
8.3	Das charakteristische Polynom	249
8.4	Das Minimalpolynom	256
8.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	265
9	Elementarste Gruppentheorie	271
9.1	Beispiele von Gruppen	271
9.1.1	Gruppen in bekannten Strukturen	273
9.1.2	Gruppen aus bekannten Objekten	274
9.1.3	Gruppen aus Permutationen	276
9.2	Einfache Strukturaussagen für Gruppen	278
9.2.1	Untergruppen	278
9.2.2	Zyklische Gruppen	282
9.2.3	Der Homomorphiesatz	285
9.3	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	289
10	Skalarprodukte	295
10.1	Ein Beispiel	295
10.2	Bilinearformen	297
10.3	Skalarprodukte	307
10.4	Orthogonale Abbildungen	315
10.5	... und eine zweite symmetrische Bilinearform?	324
10.6	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	329

11 Lösungen	337
11.1 Lösungsvektoren der \square -Aufgaben	337
11.2 Tipps zur Lösung der Übungsaufgaben	339
Literatur	359
Sachverzeichnis	361