

---

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können</b> | <b>1</b>  |
| 1.1      | Mengen  | 1         |
| 1.2      | Äquivalenzrelationen                                    | 4         |
| 1.3      | Abbildungen   | 7         |
| 1.4      | Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?           | 13        |
| 1.5      | Die $\Sigma$ -Notation                                  | 18        |
| 1.6      | Beweisprinzipien  | 20        |
| 1.7      | Verständnisfragen, Übungen und Tipps                    | 22        |
| <b>2</b> | <b>Körper</b>   | <b>29</b> |
| 2.1      | Die Definition  | 29        |
| 2.1.1    | Gesetze der Addition                                    | 29        |
| 2.1.2    | Gesetze der Multiplikation                              | 30        |
| 2.1.3    | Distributivgesetz                                       | 30        |
| 2.2      | Beispiele von Körpern                                   | 32        |
| 2.2.1    | Der Körper der komplexen Zahlen                         | 33        |
| 2.2.2    | Der Quaternionenschiefkörper                            | 36        |
| 2.2.3    | Einige endliche Körper                                  | 40        |
| 2.2.4    | Konstruktion eines Körpers mit vier Elementen           | 44        |
| 2.3      | Automorphismen von Körpern                              | 46        |
| 2.3.1    | Die Definitionen  | 47        |
| 2.3.2    | Der Körper der rationalen Zahlen                        | 47        |
| 2.3.3    | Der Körper der reellen Zahlen                           | 50        |
| 2.3.4    | Konjugiert-komplexe Zahlen                              | 51        |
| 2.4      | Verständnisfragen, Übungen und Tipps                    | 52        |
| <b>3</b> | <b>Vektorräume</b>                                      | <b>59</b> |
| 3.1      | Die Definition  | 59        |
| 3.2      | Beispiele von Vektorräumen                              | 61        |
| 3.2.1    | Vektorräume mit Hilfe von Geometrie                     | 61        |
| 3.2.2    | Der Vektorraum $K^n$                                    | 62        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.2.3    | Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen . . . . .         | 63         |
| 3.2.4    | Der Vektorraum aller unendlichen Folgen . . . . .             | 64         |
| 3.2.5    | Ein Vektorraum unendlicher Folgen . . . . .                   | 64         |
| 3.2.6    | Vektorräume von Funktionen . . . . .                          | 64         |
| 3.2.7    | Lösungen eines Gleichungssystems . . . . .                    | 65         |
| 3.2.8    | Teilmengen einer Menge . . . . .                              | 65         |
| 3.2.9    | Körper als Vektorräume . . . . .                              | 65         |
| 3.3      | Elementare Theorie der Vektorräume . . . . .                  | 66         |
| 3.3.1    | Der Begriff der Basis . . . . .                               | 67         |
| 3.3.2    | Der Steinitzsche Austauschsatz . . . . .                      | 75         |
| 3.3.3    | Der Dimensionssatz . . . . .                                  | 83         |
| 3.3.4    | Faktorräume . . . . .   | 85         |
| 3.4      | Zur Geschichte der linearen Algebra . . . . .                 | 92         |
| 3.5      | Verständnisfragen, Übungen und Tipps . . . . .                | 94         |
| <b>4</b> | <b>Anwendungen von Vektorräumen . . . . .</b>                 | <b>105</b> |
| 4.1      | Lineare Gleichungssysteme . . . . .                           | 105        |
| 4.1.1    | Begriffe und Fragen . . . . .                                 | 105        |
| 4.1.2    | Exkurs über Matrizen . . . . .                                | 106        |
| 4.1.3    | Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen . . . . .          | 111        |
| 4.1.4    | Der Gaußsche Algorithmus . . . . .                            | 116        |
| 4.2      | Affine Geometrie . . . . .                                    | 122        |
| 4.2.1    | Affine Räume . . . . .  | 123        |
| 4.2.2    | Unterräume . . . . .  | 126        |
| 4.3      | Codierungstheorie . . . . .                                   | 129        |
| 4.3.1    | Grundlegende Begriffe . . . . .                               | 129        |
| 4.3.2    | Lineare Codes . . . . .                                       | 133        |
| 4.4      | Verständnisfragen, Übungen und Tipps . . . . .                | 139        |
| <b>5</b> | <b>Lineare Abbildungen . . . . .</b>                          | <b>147</b> |
| 5.1      | Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .         | 147        |
| 5.2      | Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen . . . . . | 154        |
| 5.3      | Der Homomorphiesatz . . . . .                                 | 162        |
| 5.4      | Der Dualraum . . . . .  | 166        |
| 5.5      | Verständnisfragen, Übungen und Tipps . . . . .                | 171        |
| <b>6</b> | <b>Polynomringe . . . . .</b>                                 | <b>177</b> |
| 6.1      | Ringe . . . . .   | 177        |
| 6.1.1    | Gesetze der Addition . . . . .                                | 177        |
| 6.1.2    | Gesetz der Multiplikation . . . . .                           | 178        |
| 6.1.3    | Distributivgesetze . . . . .                                  | 178        |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.2   | Was ist eigentlich $x$ ?                       | 179 |
| 6.3   | Polynomdivision                                | 187 |
| 6.4   | Ideale von $K[x]$                              | 192 |
| 6.5   | Verständnisfragen, Übungen und Tipps           | 195 |
| 7     | <b>Determinanten</b>                           | 203 |
| 7.1   | Die Determinantenfunktion                      | 203 |
| 7.2   | Permutationen                                  | 207 |
| 7.3   | Gerade und ungerade Permutationen              | 211 |
| 7.4   | Die Leibnizsche Determinantenformel            | 218 |
| 7.5   | Wie berechnet man eine Determinante?           | 222 |
| 7.6   | Der Multiplikationssatz                        | 233 |
| 7.7   | Verständnisfragen, Übungen und Tipps           | 236 |
| 8     | <b>Diagonalisierbarkeit</b>                    | 241 |
| 8.1   | Einführung                                     | 241 |
| 8.2   | Eigenvektoren und Eigenwerte                   | 243 |
| 8.3   | Das charakteristische Polynom                  | 249 |
| 8.4   | Das Minimalpolynom                             | 256 |
| 8.5   | Verständnisfragen, Übungen und Tipps           | 265 |
| 9     | <b>Elementarste Gruppentheorie</b>             | 271 |
| 9.1   | Beispiele von Gruppen                          | 271 |
| 9.1.1 | Gruppen in bekannten Strukturen                | 273 |
| 9.1.2 | Gruppen aus bekannten Objekten                 | 274 |
| 9.1.3 | Gruppen aus Permutationen                      | 276 |
| 9.2   | Einfache Strukturaussagen für Gruppen          | 278 |
| 9.2.1 | Untergruppen                                   | 278 |
| 9.2.2 | Zyklische Gruppen                              | 282 |
| 9.2.3 | Der Homomorphiesatz                            | 285 |
| 9.3   | Verständnisfragen, Übungen und Tipps           | 289 |
| 10    | <b>Skalarprodukte</b>                          | 295 |
| 10.1  | Ein Beispiel                                   | 295 |
| 10.2  | Bilinearformen                                 | 297 |
| 10.3  | Skalarprodukte                                 | 307 |
| 10.4  | Orthogonale Abbildungen                        | 315 |
| 10.5  | ... und eine zweite symmetrische Bilinearform? | 324 |
| 10.6  | Verständnisfragen, Übungen und Tipps           | 329 |

---

|                        |   |     |
|------------------------|---|-----|
| <b>11</b>              | <b>Lösungen</b>                         | 337 |
| 11.1                   | Lösungsvektoren der $\square$ -Aufgaben | 337 |
| 11.2                   | Tipps zur Lösung der Übungsaufgaben     | 339 |
| <b>Literatur</b>       |   | 359 |
| <b>Sachverzeichnis</b> |   | 361 |