

# Table des matières

## Partie I Généralités

<b>1</b>	<b>La notion de plan d'expérience</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction	3
1.2	La démarche de planification expérimentale	4
1.2.1	Objectifs	4
1.2.2	Réponse	4
1.2.3	Facteurs	5
1.2.4	Domaine expérimental	6
1.2.5	Réalisation des expériences	7
1.3	Historique	14
1.4	Guide de lecture de l'ouvrage	15
1.4.1	Positionnement	15
1.4.2	Structure	16
1.4.3	Analyse des exemples	19
1.5	Thèmes non abordés dans l'ouvrage	20
1.5.1	Plans pour modèles mixtes	21
1.5.2	Plans pour modèles non linéaires	21
1.5.3	Plans à effets de voisinage	22
1.5.4	Plans d'expérience numériques	23
1.6	Logiciels pour les plans d'expérience	23
1.7	Présentation d'une étude	24
1.7.1	Facteurs et réponse	25
1.7.2	Domaine expérimental	25
1.7.3	Codage des facteurs	26
1.7.4	Plan d'expérience utilisé	26
1.7.5	Ajustement d'un modèle d'ordre un	28
1.7.6	Ajustement d'un modèle à effets d'interactions	30
1.7.7	Ajustement d'un modèle d'ordre deux	32
1.7.8	Recherche des conditions optimales	35
1.7.9	Conclusion	36

<b>2 Outils mathématiques pour les plans d'expérience</b> . . . . .	39
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Algèbre . . . . .	40
2.2.1 Calcul matriciel . . . . .	40
2.2.2 Projection orthogonale . . . . .	41
2.2.3 Analyse spectrale . . . . .	41
2.2.4 Matrices particulières . . . . .	42
2.2.5 Notion de groupe . . . . .	43
2.3 Probabilités . . . . .	43
2.3.1 Variables aléatoires réelles . . . . .	43
2.3.2 Vecteurs aléatoires . . . . .	44
2.4 Statistiques . . . . .	45
2.4.1 Notion d'estimateur . . . . .	45
2.4.2 Modèle statistique . . . . .	46
2.4.3 Modélisation linéaire . . . . .	47
2.4.4 Estimation au sens des moindres carrés . . . . .	49
2.4.5 Prédiction de la réponse moyenne . . . . .	50
2.5 Analyse de la variance . . . . .	51
2.5.1 Décomposition fondamentale . . . . .	51
2.5.2 Coefficient de corrélation linéaire multiple . . . . .	53
2.5.3 Estimation de $\sigma^2$ . . . . .	54
2.5.4 Décomposition plus fine de SSE . . . . .	55
2.6 Tests d'hypothèses . . . . .	58
2.6.1 Exemple introductif . . . . .	58
2.6.2 Cas général . . . . .	59
2.6.3 Test de validité du modèle . . . . .	60
2.6.4 Test de significativité des paramètres . . . . .	61
2.6.5 Test d'ajustement du modèle . . . . .	62
2.6.6 Exemples . . . . .	63
2.7 (Compléments) Démonstrations . . . . .	69

---

## Partie II Plans d'expérience pour facteurs quantitatifs

---

<b>3 Plans d'expérience pour modèles d'ordre un</b> . . . . .	77
3.1 Introduction . . . . .	77
3.2 Généralités . . . . .	78
3.2.1 Variables codées . . . . .	78
3.2.2 Modèle utilisé . . . . .	79
3.2.3 Moments d'un plan d'expérience . . . . .	79
3.2.4 Plans d'expérience usuels . . . . .	80
3.3 Plans factoriels complets . . . . .	82
3.3.1 Définition . . . . .	82

3.3.2	Propriétés . . . . .	84
3.3.3	Intérêt des réplications centrales. . . . .	85
3.4	Fractions régulières de plans factoriels . . . . .	86
3.4.1	Exemple . . . . .	86
3.4.2	Contrastes et produit d'Hadamard . . . . .	87
3.4.3	Générateurs d'une fraction régulière . . . . .	89
3.4.4	Fractions régulières de résolution III . . . . .	92
3.4.5	Taille des plans factoriels . . . . .	93
3.5	Plans simples . . . . .	94
3.5.1	Définition . . . . .	94
3.5.2	Propriétés . . . . .	96
3.6	Plans de Plackett et Burman . . . . .	97
3.6.1	Définition . . . . .	97
3.6.2	Propriétés . . . . .	99
3.7	Exemple d'application . . . . .	99
3.8	Résumé . . . . .	106
3.9	(Compléments) Démonstrations . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Plans d'expérience pour modèles à effets d'interactions . . . . .</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	115
4.2	Généralités . . . . .	116
4.2.1	Modèle utilisé . . . . .	116
4.2.2	Plans d'expérience usuels . . . . .	117
4.3	Plans factoriels complets . . . . .	118
4.4	Fractions régulières de plans factoriels . . . . .	120
4.4.1	Fractions régulières de résolution V . . . . .	120
4.4.2	Taille des plans factoriels . . . . .	121
4.5	Généralisation à des interactions quelconques . . . . .	122
4.5.1	Modèle à effets d'interactions d'ordre 3 . . . . .	122
4.5.2	Modèle contenant tous les effets d'interactions . . . . .	125
4.5.3	Application aux fractions de résolution III . . . . .	127
4.6	Utilisation de modèles incomplets . . . . .	129
4.7	Exemple d'application . . . . .	133
4.8	Résumé . . . . .	143
4.9	(Compléments) Démonstrations . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Plans d'expérience pour surfaces de réponse . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Introduction . . . . .	151
5.2	Généralités . . . . .	152
5.2.1	Modèle utilisé . . . . .	152
5.2.2	Plans d'expérience usuels . . . . .	153
5.2.3	Inversion de la matrice des moments d'un plan usuel . . . . .	154
5.2.4	Estimations et prédictions . . . . .	155
5.2.5	Isovariance par transformations orthogonales . . . . .	156
5.2.6	Graphes des variances extrêmes . . . . .	158

## VIII Table des matières

5.3	Plans composites centrés . . . . .	161
5.3.1	Définition . . . . .	161
5.3.2	Propriétés . . . . .	162
5.3.3	Intérêt des réplications centrales . . . . .	166
5.3.4	Plans composites centrés de petite taille . . . . .	168
5.3.5	Taille des plans composites centrés . . . . .	169
5.4	Plans de Box et Behnken . . . . .	170
5.4.1	Définition . . . . .	170
5.4.2	Propriétés . . . . .	172
5.5	Plans simplex augmentés . . . . .	173
5.5.1	Définition . . . . .	173
5.5.2	Propriétés . . . . .	175
5.6	Plans hybrides . . . . .	176
5.6.1	Définition . . . . .	176
5.6.2	Propriétés . . . . .	178
5.7	Exemple d'application . . . . .	180
5.8	Résumé . . . . .	188
5.9	(Compléments) Résultats théoriques . . . . .	193
5.9.1	Quelques résultats de calcul matriciel . . . . .	193
5.10	(Compléments) Démonstrations . . . . .	194
<b>6</b>	<b>Plans d'expérience en blocs . . . . .</b>	<b>203</b>
6.1	Introduction . . . . .	203
6.2	Généralités . . . . .	204
6.2.1	Modèle utilisé . . . . .	204
6.2.2	Plans d'expérience usuels . . . . .	206
6.2.3	Inversion de la matrice des moments généralisée . . . . .	208
6.2.4	Estimations et prédictions . . . . .	208
6.2.5	Comparaison des effets de blocs . . . . .	211
6.3	Plans bloqués orthogonalement . . . . .	212
6.3.1	Définition . . . . .	212
6.3.2	Reconstruction de l'information . . . . .	213
6.3.3	Isovariance par transformations orthogonales . . . . .	214
6.3.4	Une méthode universelle de blocage orthogonal . . . . .	216
6.4	Exemples de constructions . . . . .	217
6.4.1	Plans composites centrés . . . . .	217
6.4.2	Plans de Box et Benken . . . . .	221
6.4.3	Plans hybrides . . . . .	223
6.5	Exemple d'application . . . . .	224
6.6	Résumé . . . . .	232
6.7	(Compléments) Démonstrations . . . . .	239

<b>7</b>	<b>Plans d'expérience pour mélanges</b>	249
7.1	Introduction	249
7.2	Généralités	250
7.2.1	Hypothèses fondamentales	250
7.2.2	Représentation graphique d'un mélange	250
7.2.3	Notation standard des réponses	253
7.3	Modèles pour mélanges	254
7.3.1	Modèle d'ordre un	254
7.3.2	Modèle d'ordre deux	255
7.3.3	Modèle d'ordre trois complet	257
7.3.4	Modèle synergique d'ordre trois	258
7.3.5	Modèle synergique d'ordre quelconque	260
7.3.6	Résumé	261
7.3.7	Analyse de la variance	262
7.4	Réseaux de Scheffé	263
7.4.1	Définition	263
7.4.2	Ajustement de divers modèles	264
7.5	Réseaux de Scheffé centrés	267
7.5.1	Définition	267
7.5.2	Ajustement d'un modèle synergique	269
7.6	Autres plans pour mélanges	270
7.6.1	Réseaux de Scheffé déséquilibrés	270
7.6.2	Autres types de plans d'expérience	271
7.7	Introduction d'effets de blocs	272
7.7.1	Modèle à effets de blocs	272
7.7.2	Singularité liée au modèle	273
7.7.3	Plans bloqués orthogonalement	274
7.7.4	Estimation des effets de blocs	275
7.8	Exemple d'application	276
7.9	Résumé	284
7.10	(Compléments) Résultats théoriques	287
7.10.1	Ajustement d'un modèle synergique	287
7.11	(Compléments) Démonstrations	289

---

### Partie III Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs

---

<b>8</b>	<b>Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs</b>	303
8.1	Introduction	303
8.2	Généralités	304
8.2.1	Codage des facteurs qualitatifs	304
8.2.2	Notation standard des réponses	305
8.2.3	Matrice d'incidence	306
8.2.4	Modèle additif	308
8.2.5	Contraintes d'identification	309

8.2.6	Application au modèle additif . . . . .	310
8.2.7	Plan d'expérience orthogonal . . . . .	311
8.2.8	Propriétés des plans orthogonaux . . . . .	312
8.2.9	Analyse de la variance . . . . .	313
8.3	Plans factoriels complets . . . . .	314
8.3.1	Définition . . . . .	314
8.3.2	Propriétés . . . . .	315
8.4	Fractions régulières de plans factoriels . . . . .	316
8.4.1	Cas particulier des facteurs à deux modalités . . . . .	317
8.4.2	Cas général . . . . .	319
8.4.3	Générateurs d'une fraction régulière . . . . .	321
8.4.4	Fractions régulières de résolution III . . . . .	323
8.5	Autres types de plans fractionnaires . . . . .	324
8.5.1	Existence de plans orthogonaux de petite taille . . . . .	324
8.5.2	Fractions pour nombre de modalités non premier . . . . .	326
8.5.3	Fractions asymétriques . . . . .	328
8.6	Plans en carrés latins . . . . .	330
8.6.1	Utilisation de carrés latins . . . . .	330
8.6.2	Utilisation de carrés gréco-latins . . . . .	332
8.6.3	Utilisation de carrés hyper-gréco-latins . . . . .	335
8.7	Autres types de plans d'expérience . . . . .	336
8.7.1	Tables de Taguchi . . . . .	336
8.7.2	Transformations conservant l'orthogonalité . . . . .	337
8.7.3	Plans produit . . . . .	339
8.7.4	Tableaux orthogonaux . . . . .	340
8.7.5	Plans obtenus numériquement . . . . .	341
8.8	Introduction d'effets d'interaction . . . . .	342
8.9	Exemple d'application . . . . .	345
8.10	Résumé . . . . .	351
8.11	(Compléments) Démonstrations . . . . .	355
9	<b>Plans d'expérience en blocs pour facteurs qualitatifs . . . . .</b>	363
9.1	Introduction . . . . .	363
9.2	Généralités . . . . .	364
9.2.1	Modèle pour plans en blocs . . . . .	364
9.2.2	Matrices et valeurs remarquables . . . . .	365
9.2.3	Contraintes d'identification . . . . .	367
9.2.4	Équations normales . . . . .	367
9.3	Plans en blocs complets . . . . .	371
9.3.1	Définition et propriétés . . . . .	371
9.3.2	Estimation des divers effets . . . . .	372
9.4	Plans en blocs incomplets équilibrés . . . . .	374
9.4.1	Définition et propriétés . . . . .	374
9.4.2	Estimation des divers effets . . . . .	376
9.4.3	Construction des BIBD . . . . .	378

9.5	Plans en blocs partiellement équilibrés .....	380
9.5.1	Définition et propriétés .....	380
9.5.2	Estimation des divers effets .....	382
9.5.3	Construction des GDD .....	385
9.5.4	Généralisations .....	386
9.6	Plans cycliques .....	388
9.6.1	Définition .....	388
9.6.2	Propriétés .....	389
9.7	Exemple d'application .....	390
9.8	Résumé .....	394
9.9	(Compléments) Résultats théoriques .....	399
9.9.1	Analyse d'un plan cyclique .....	399
9.10	(Compléments) Démonstrations .....	402

---

## Partie IV Optimalité des plans d'expérience

---

10	Critères d'optimalité .....	417
10.1	Introduction .....	417
10.2	Rappels et compléments .....	418
10.2.1	Ensembles ordonnés .....	418
10.2.2	Ordres sur les vecteurs .....	418
10.2.3	Matrice d'information .....	421
10.2.4	Complément d'analyse spectrale .....	426
10.3	Optimalité uniforme .....	427
10.3.1	Exemple introductif .....	427
10.3.2	Extension au cas vectoriel .....	428
10.3.3	Propriétés .....	429
10.3.4	Généralisation .....	431
10.4	Critères d'efficacité .....	433
10.4.1	Généralités et hypothèses .....	433
10.4.2	Le critère de A-éfficacité .....	434
10.4.3	Le critère de D-éfficacité .....	435
10.4.4	Le critère de E-éfficacité .....	436
10.4.5	Le critère général de $\Phi_q$ -éfficacité .....	437
10.4.6	Propriétés .....	438
10.4.7	Caractérisation des plans d'expérience $\Phi_q$ -optimaux .....	440
10.4.8	Plans $\Phi_q$ -optimaux obtenus numériquement .....	443
10.5	Optimalité universelle .....	445
10.5.1	Définition .....	445
10.5.2	Propriétés .....	447
10.6	Exemples d'applications .....	448
10.6.1	Plans optimaux pour modèles d'ordre un .....	449
10.6.2	Plans optimaux pour modèles avec interactions .....	450
10.6.3	Plans optimaux pour surfaces de réponse .....	451

10.6.4	Plans optimaux pour modèles à effets de blocs	456
10.6.5	Plans optimaux pour modèles à facteurs qualitatifs	457
10.7	Résumé	460
10.8	(Compléments) Démonstrations	465

---

## Partie V Annexes

---

<b>A</b>	<b>Plans factoriels et représentation linéaire des groupes</b>	485
A.1	Représentation linéaire des groupes finis	485
A.2	Application aux plans à deux niveaux	488
A.2.1	Cas des plans factoriels complets	488
A.2.2	Cas des fractions régulières	492
A.3	Généralisation	495
A.3.1	Cas des plans factoriels complets	496
A.3.2	Cas des fractions régulières	500
<b>B</b>	<b>Plans d'expérience classiques</b>	507
B.1	Plans factoriels complets	507
B.2	Fractions régulières de plans complets	508
B.3	Plans simplex	508
B.4	Plans de Plackett et Burman	509
B.5	Plans composites centrés	509
B.6	Plans de Box et Behnken	510
B.7	Plans simplex augmentés	510
B.8	Plans hybrides	511
B.9	Réseaux de Scheffé	512
B.10	Réseaux de Scheffé centrés	512
B.11	Plans factoriels complets pour facteurs qualitatifs	513
B.12	Fractions régulières de plans complets pour facteurs qualitatifs	513
B.13	Plans en carrés latins	514
B.14	Tables de Taguchi	515
B.15	Plans en blocs complets	516
B.16	Plans en blocs incomplets équilibrés	516
B.17	Plans en blocs partiellement équilibrés	516
<b>C</b>	<b>Notations utilisées</b>	519
<b>Bibliographie</b>		523
<b>Index</b>		531