

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Arithmetik</b> .....	1
1.1 Mengen .....	1
1.2 Aussageformen und logische Zeichen .....	4
1.3 Einteilung der Zahlen .....	8
1.4 Grundrechenarten .....	11
1.5 Grundlegende Rechenregeln .....	12
1.5.1 Buchstabenrechnen .....	12
1.5.2 Kehrwert, Quersumme .....	12
1.5.3 Teilbarkeitsregeln .....	12
1.5.4 Punktrechnung vor Strichrechnung .....	13
1.5.5 Potenzrechnung vor Punktrechnung .....	13
1.5.6 Grundgesetze der Addition und Multiplikation .....	14
1.5.7 Grundregeln der Klammerrechnung .....	14
1.5.8 Multiplikation mit Klammern .....	15
1.5.9 Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen .....	17
1.5.10 Binomische Formeln .....	18
1.5.11 Division mit Klammern .....	18
1.6 Bruchrechnung .....	19
1.6.1 Definitionen .....	19
1.6.2 Erweitern und Kürzen .....	20
1.6.3 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche .....	21
1.6.4 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche .....	21
1.6.5 Multiplizieren von Brüchen .....	22
1.6.6 Dividieren von Brüchen .....	23
1.7 Potenz- und Wurzelrechnung .....	24
1.7.1 Definition der Potenz .....	24
1.7.2 Regeln der Potenzrechnung .....	25
1.7.3 Definition der Wurzel .....	28
1.7.4 Regeln der Wurzelrechnung .....	29

1.8	Dezimalzahlen und Dualzahlen .....	33
1.8.1	Dezimalsystem .....	34
1.8.2	Dualsystem .....	35
1.8.3	Runden .....	36
1.9	Logarithmen .....	36
1.9.1	Definition des Logarithmus .....	36
1.9.2	Spezielle Basen .....	37
1.9.3	Regeln der Logarithmenrechnung .....	38
1.9.4	Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen .....	39
1.9.5	Dekadische Logarithmen .....	40
1.10	Mittelwerte .....	41
1.10.1	Arithmetisches Mittel .....	41
1.10.2	Geometrisches Mittel .....	41
1.10.3	Harmonisches Mittel .....	42
1.10.4	Quadratisches Mittel .....	42
1.11	Ungleichungen .....	43
1.11.1	Definitionen und Rechenregeln .....	43
1.11.2	Absolutbetrag .....	44
1.11.3	Intervalle .....	45
1.12	Komplexe Zahlen .....	47
1.12.1	Algebraische Form .....	47
1.12.2	Trigonometrische Form .....	49
1.12.3	Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen .....	50
1.12.4	Multiplizieren komplexer Zahlen .....	51
1.12.5	Dividieren komplexer Zahlen .....	52
1.12.6	Potenzieren komplexer Zahlen .....	54
1.12.7	Radizieren komplexer Zahlen .....	55
1.12.8	Eulersche Formel .....	57
1.13	Beweisprinzipien .....	58
1.13.1	Direkter Beweis .....	58
1.13.2	Beweis durch Kontraposition .....	59
1.13.3	Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis) .....	59
1.13.4	Beweis mit vollständiger Induktion .....	59
2	Gleichungen .....	63
2.1	Gleichungssarten .....	63
2.2	Äquivalente Umformungen .....	66
2.3	Lineare Gleichungen .....	67
2.4	Proportionen .....	69
2.5	Quadratische Gleichungen .....	71
2.5.1	Definitionen .....	71
2.5.2	Lösungsverfahren .....	71
2.5.3	Satz von Vieta für quadratische Gleichungen .....	77

2.6	<b>Algebraische Gleichungen höheren Grades</b>	78
2.6.1	Kubische Gleichungen	78
2.6.2	Polynomdivision	80
2.6.3	Gleichungen vierten Grades	82
2.6.4	Gleichungen $n$ -ten Grades	86
2.6.5	Satz von Vieta für Gleichungen $n$ -ten Grades	87
2.7	<b>Auf algebraische Gleichungen zurückführbare Gleichungen</b>	89
2.7.1	Bruchgleichungen	89
2.7.2	Wurzelgleichungen	90
2.8	<b>Transzendente Gleichungen</b>	93
2.8.1	Exponentialgleichungen	93
2.8.2	Logarithmische Gleichungen	94
2.8.3	Trigonometrische Gleichungen	95
2.9	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	96
2.9.1	Definitionen	96
2.9.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen	97
2.9.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen	101
2.9.4	Matrizen und Determinanten	103
2.10	<b>Lineare Ungleichungen</b>	115
2.10.1	Definitionen	115
2.10.2	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	115
2.10.3	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	116
2.10.4	Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen	118
3	<b>Planimetrie</b>	121
3.1	Geraden und Strecken	121
3.2	Winkel	122
3.3	Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal	126
3.4	Projektion	129
3.5	Geometrische Örter	130
3.6	<b>Dreiecke</b>	131
3.6.1	Allgemeine Dreiecke	131
3.6.2	Gleichschenklige Dreiecke	133
3.6.3	Gleichseitige Dreiecke	133
3.6.4	Rechtwinklige Dreiecke	134
3.6.5	Besondere Geraden, Strecken und Kreise	135
3.6.6	Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck	139
3.6.7	Kongruenz von Dreiecken	141
3.6.8	Grundkonstruktionen des Dreiecks	143
3.7	<b>Vierecke</b>	146
3.7.1	Allgemeine Vierecke	146
3.7.2	Trapeze	148
3.7.3	Parallelogramme	149

3.7.4	Rhomben . . . . .	150
3.7.5	Rechtecke . . . . .	150
3.7.6	Quadrat e . . . . .	151
3.7.7	Drachen . . . . .	151
3.7.8	Sehnenvierecke . . . . .	152
3.7.9	Tangentenvierecke . . . . .	153
3.8	Reguläre $n$ -Ecke . . . . .	154
3.9	Polygone . . . . .	156
3.10	Kreise . . . . .	157
3.10.1	Definitionen . . . . .	157
3.10.2	Kreissektoren . . . . .	159
3.10.3	Kreissegmente . . . . .	160
3.10.4	Kreise und Geraden . . . . .	161
3.10.5	Winkelsätze am Kreis . . . . .	161
3.10.6	Eigenschaften von Sekanten und Sehnen . . . . .	162
3.10.7	Tangentenkonstruktionen . . . . .	163
3.10.8	Sätze über Sehnen, Sekanten, Tangenten . . . . .	165
3.10.9	Bogenmaß . . . . .	166
3.11	Symmetrie . . . . .	168
3.11.1	Punktsymmetrie . . . . .	168
3.11.2	Achsensymmetrie . . . . .	168
3.12	Ähnlichkeit . . . . .	168
3.12.1	Zentrische Streckung . . . . .	168
3.12.2	Strahlensätze . . . . .	169
3.12.3	Ähnliche Figuren . . . . .	170
3.12.4	Streckenteilungen . . . . .	172
4	Stereometrie . . . . .	177
4.1	Prismen . . . . .	177
4.1.1	Allgemeine Prismen . . . . .	177
4.1.2	Parallelepiped und Würfel . . . . .	178
4.2	Zylinder . . . . .	180
4.2.1	Allgemeine Zylinder . . . . .	180
4.2.2	Gerade Kreiszylinder . . . . .	181
4.2.3	Hohlzylinder . . . . .	182
4.3	Pyramiden . . . . .	182
4.3.1	Allgemeine Pyramiden . . . . .	182
4.3.2	Gerade quadratische Pyramiden . . . . .	184
4.4	Kegel . . . . .	185
4.4.1	Allgemeine Kegel . . . . .	185
4.4.2	Gerade Kreiskegel . . . . .	186
4.5	Cavalierisches Prinzip . . . . .	187

4.6	Pyramidenstümpfe und Kegelstümpfe . . . . .	187
4.6.1	Pyramidenstümpfe . . . . .	187
4.6.2	Kegelstümpfe . . . . .	188
4.7	Platonische Körper . . . . .	190
4.8	Kugeln . . . . .	192
4.8.1	Definitionen . . . . .	192
4.8.2	Kugelsegmente . . . . .	193
4.8.3	Kugelsektoren . . . . .	194
4.8.4	Kugelschichten . . . . .	195
5	Funktionen . . . . .	197
5.1	Definition und Darstellungen von Funktionen . . . . .	197
5.1.1	Definitionen . . . . .	197
5.1.2	Funktionsgleichung . . . . .	198
5.1.3	Graph einer Funktion . . . . .	200
5.1.4	Wertetabelle einer Funktion . . . . .	201
5.2	Verhalten von Funktionen . . . . .	201
5.2.1	Monotone Funktionen . . . . .	201
5.2.2	Symmetrische Funktionen . . . . .	203
5.2.3	Beschränkte Funktionen . . . . .	204
5.2.4	Injektive Funktionen . . . . .	205
5.2.5	Surjektive Funktionen . . . . .	206
5.2.6	Bijektive Funktionen . . . . .	206
5.2.7	Periodische Funktionen . . . . .	207
5.2.8	Umkehrfunktionen . . . . .	207
5.2.9	Reelle und komplexe Funktionen . . . . .	209
5.3	Einteilung der elementaren Funktionen . . . . .	210
5.4	Ganze rationale Funktionen . . . . .	214
5.4.1	Konstante Funktionen . . . . .	214
5.4.2	Lineare Funktionen . . . . .	215
5.4.3	Quadratische Funktionen . . . . .	218
5.4.4	Kubische Funktionen . . . . .	227
5.4.5	Ganze rationale Funktionen $n$ -ten Grades . . . . .	228
5.4.6	Horner-Schema . . . . .	231
5.5	Gebrochene rationale Funktionen . . . . .	232
5.5.1	Nullstellen, Pole, Asymptoten . . . . .	232
5.5.2	Partialbruchzerlegung . . . . .	240
5.6	Irrationale Funktionen . . . . .	243
5.7	Transzendente Funktionen . . . . .	246
5.7.1	Exponentialfunktionen . . . . .	246
5.7.2	Logarithmusfunktionen . . . . .	248

<b>6 Trigonometrie</b>	251
6.1 Definition der trigonometrischen Funktionen	251
6.2 Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel	254
6.3 Beziehungen für den gleichen Winkel	256
6.4 Graphen der trigonometrischen Funktionen	257
6.5 Reduktionsformeln	260
6.6 Additionstheoreme	261
6.7 Sinussatz und Kosinussatz	264
6.8 Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	265
6.9 Arkusfunktionen	269
<b>7 Analytische Geometrie</b>	275
7.1 Koordinatensysteme	275
7.1.1 Kartesisches Koordinatensystem der Ebene	276
7.1.2 Polarkoordinatensystem der Ebene	277
7.1.3 Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	277
7.1.4 Kartesisches Koordinatensystem des Raums	280
7.1.5 Kugelkoordinatensystem des Raums	280
7.1.6 Zylinderkoordinatensystem des Raums	282
7.2 Geraden	283
7.2.1 Geradengleichungen	283
7.2.2 Abstände	289
7.3 Kreise	291
7.3.1 Kreisgleichungen	291
7.3.2 Berechnung von Kreisen	294
7.3.3 Kreis und Gerade	295
7.4 Kugeln	300
7.5 Kegelschnitte	301
7.5.1 Ellipsen	304
7.5.2 Hyperbeln	308
7.5.3 Parabeln	314
7.5.4 Anwendungen	319
7.6 Graphisches Lösen von Gleichungen	324
7.7 Vektoren	329
7.7.1 Definitionen	329
7.7.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	330
7.7.3 Addition und Subtraktion zweier Vektoren	330
7.7.4 Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene	332
7.7.5 Komponentendarstellung von Vektoren im Raum	333
7.7.6 Skalarprodukt	334
7.7.7 Vektorprodukt	336
7.7.8 Spatprodukt	337

<b>8 Differential- und Integralrechnung</b>	341
<b>8.1 Folgen</b>	341
8.1.1 Grundbegriffe	341
8.1.2 Arithmetische Folgen	343
8.1.3 Geometrische Folgen	343
8.1.4 Grenzwert einer Folge	344
8.1.5 Tabelle einiger Grenzwerte	345
8.1.6 Divergente Folgen	346
<b>8.2 Reihen</b>	347
8.2.1 Definitionen	347
8.2.2 Arithmetische Reihen	350
8.2.3 Geometrische Reihen	351
8.2.4 Harmonische Reihen	352
8.2.5 Alternierende Reihen	353
<b>8.3 Grenzwerte von Funktionen</b>	354
8.3.1 Grenzwert an einer endlichen Stelle	354
8.3.2 Einseitige Grenzwerte	356
8.3.3 Grenzwert im Unendlichen	356
8.3.4 Rechenregeln für Grenzwerte	357
8.3.5 Unbestimmte Ausdrücke	358
8.3.6 Stetigkeit einer Funktion	359
8.3.7 Unstetigkeitsstellen	360
<b>8.4 Ableitung einer Funktion</b>	362
8.4.1 Definitionen	362
8.4.2 Differentiationsregeln	364
8.4.3 Höhere Ableitungen	368
8.4.4 Ableitungen einiger algebraischer Funktionen	369
8.4.5 Ableitungen einiger transzendenten Funktionen	370
8.4.6 Sekanten und Tangenten	373
8.4.7 Extremwerte von Funktionen	374
8.4.8 Krümmungsverhalten von Funktionen	376
8.4.9 Wendepunkte von Funktionen	378
8.4.10 Kurvendiskussion	379
8.4.11 Anwendungsbeispiele	381
8.4.12 Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung	382
<b>8.5 Integralrechnung</b>	385
8.5.1 Unbestimmtes Integral	385
8.5.2 Integrationsregeln	387
8.5.3 Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen	392
8.5.4 Unbestimmte Integrale einiger transzendenten Funktionen	393
8.5.5 Bestimmtes Integral	394
8.5.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	396

·	8.5.7 Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	397
·	8.5.8 Einige Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	399
8.6	Funktionenreihen . . . . .	404
8.6.1	Definitionen . . . . .	404
8.6.2	Potenzreihen . . . . .	406
8.6.3	Fourier-Reihen . . . . .	410
9	Kombinatorik . . . . .	419
9.1	Kombinatorische Grundprinzipien . . . . .	419
9.2	Fakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck . . . . .	421
9.3	Binomischer Lehrsatz . . . . .	424
9.4	Permutationen und Variationen . . . . .	425
9.5	Kombinationen . . . . .	427
9.6	Permutationen mit eingeschränkter Wiederholung . . . . .	431
9.7	Multinomialsatz . . . . .	432
9.8	Prinzip der Inklusion und Exklusion . . . . .	433
10	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	437
10.1	Zufällige Ereignisse . . . . .	437
10.2	Absolute und relative Häufigkeit von Ereignissen . . . . .	440
10.3	Stichproben . . . . .	441
10.4	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	448
10.5	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	450
10.6	Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	457
10.7	Zufallsvariablen . . . . .	461
	<b>Symbole und Bezeichnungsweisen . . . . .</b>	<b>465</b>
	<b>Mathematische Konstanten . . . . .</b>	<b>469</b>
	<b>Das griechische Alphabet . . . . .</b>	<b>471</b>
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>473</b>
	<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>475</b>