

Inhaltsverzeichnis

1	Das Diagonalargument	1
1.1	Zählen und Abzählbarkeit	2
1.2	Gibt es eine unendliche Einheitsgröße?	4
1.3	Cantors Diagonalargument	6
1.4	Transzendenten Zahlen	11
1.5	Andere Überabzählbarkeitsbeweise	13
1.6	Wachstumsraten	15
1.7	Die Kardinalität des Kontinuums	18
1.8	Historischer Hintergrund	21
2	Ordinalzahlen	33
2.1	Zählen jenseits der Unendlichkeit	34
2.2	Die abzählbaren Ordinalzahlen	37
2.3	Das Auswahlaxiom	43
2.4	Die Kontinuumshypothese	46
2.5	Induktion	49
2.6	Cantorsche Normalform	53
2.7	Der Satz von Goodstein	55
2.8	Herkules und die Hydra	59
2.9	Historischer Hintergrund	62
3	Berechenbarkeit und Beweis	77
3.1	Formale Systeme	78
3.2	Posts Zugang zur Unvollständigkeit	83
3.3	Gödels erster Unvollständigkeitssatz	87
3.4	Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz	92
3.5	Formalisierung der Berechenbarkeit	95
3.6	Das Halteproblem	98
3.7	Das Entscheidungsproblem	101
3.8	Historischer Hintergrund	103
4	Logik	111
4.1	Aussagenlogik	112
4.2	Ein klassisches System	114
4.3	Ein schnittfreies System für die Aussagenlogik	117

4.4	Happy End	120
4.5	Prädikatenlogik	121
4.6	Vollständigkeit, Konsistenz, Happy End	126
4.7	Historischer Hintergrund	129
5	Arithmetik	137
5.1	Wie können wir Konsistenz beweisen?	138
5.2	Formale Arithmetik	139
5.3	Die Systeme PA und PA_ω	141
5.4	Einbettung von PA in PA_ω	143
5.5	Schnitteliminierung in PA_ω	146
5.6	Die Höhe dieses großen Arguments	150
5.7	Wege zur Unendlichkeit	153
5.8	Historischer Hintergrund	155
6	Natürliche unbeweisbare Aussagen	161
6.1	Ein verallgemeinerter Satz von Goodstein	161
6.2	Von natürlichen Zahlen zu abzählbaren Ordinalzahlen	163
6.3	Vom verallgemeinerten Goodstein zur Wohlordnung	166
6.4	Verallgemeinerter und gewöhnlicher Goodstein	169
6.5	Beweisbar rekursive Funktionen	170
6.6	Völlige Unordnung ist unmöglich	174
6.7	Der schwierigste Satz der Graphentheorie	178
6.8	Historischer Hintergrund	182
7	Axiome der Unendlichkeit	191
7.1	Mengenlehre ohne Unendlichkeit	191
7.2	Unerreichbare Kardinalzahlen	195
7.3	Das Determiniertheitsaxiom	197
7.4	Größenaxiome für die Arithmetik	200
7.5	Große Kardinalzahlen und endliche Mathematik	201
7.6	Historischer Hintergrund	205
Literaturverzeichnis	213	
Sachverzeichnis	219	