

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Beschreibende Statistik</b>	1
1.1	Die historische Entwicklung der Statistik – ein kurzer Abriss	1
1.1.1	Die Amtliche Statistik	2
1.1.2	Die Politische Arithmetik	5
1.1.3	Die Universitätsstatistik und ihre Weiterentwicklung	5
1.2	Grundbegriffe der beschreibenden Statistik und Aufbereitung der Daten	8
1.2.1	Statistische Erhebung, Daten, Merkmale, Merkmalsausprägungen	8
1.2.2	Graphische Darstellungen von Daten	14
1.2.3	Lageparameter	29
1.2.4	Streuungsparameter	45
1.2.5	Lineare Regression	53
1.2.6	Korrelation	61
1.2.7	Fehler und Manipulationsmöglichkeiten	65
1.2.8	Aufgaben und Ergänzungen	65
<b>2</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b>	71
2.1	Zufall und Wahrscheinlichkeit	71
2.2	Mathematik des Zufalls	72
2.3	Entwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeit	76
2.3.1	Berühmte historische Beispiele und einige interessante Briefwechsel	76
2.3.2	Aufgaben und Ergänzungen	84
2.4	Zur geschichtlichen Entwicklung der Stochastik	85
2.5	Schritte zur Mathematisierung	89
2.5.1	Zum Modellbildungsprozess	89
2.5.2	Aufgaben und Ergänzungen	96
2.6	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 1)	97
2.6.1	Das Axiomensystem von Kolmogoroff	97
2.6.2	Folgerungen aus dem Axiomensystem – Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	103
2.6.3	Ein zum Axiomensystem von Kolmogoroff äquivalentes Axiomensystem	112
2.6.4	Die Laplace-Verteilung (Gleichverteilung)	115
2.6.5	Aufgaben und Ergänzungen	119
2.7	Geometrische Wahrscheinlichkeiten	121
2.7.1	Vier Beispiele: Glücksrad, Zielscheibe, Paradoxon von Bertrand, Nadelproblem von Buffon	121
2.7.2	Aufgaben und Ergänzungen	128
2.8	Kombinatorisches Zählen	129

2.8.1	Abzählen . . . . .	129
2.8.2	Allgemeines Zählprinzip der Kombinatorik . . . . .	131
2.8.3	Kombinatorische Figuren . . . . .	137
2.8.4	Anwendungen der kombinatorischen Figuren . . . . .	153
2.8.5	Vier-Schritt-Modell zur Lösung von Kombinatorikaufgaben – Ein didaktischer Aspekt . . . . .	162
2.8.6	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	165
2.9	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 2) . . . . .	168
2.9.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit – Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen . . . . .	168
2.9.2	Bernoulli-Ketten . . . . .	187
2.9.3	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes . . . . .	194
2.9.4	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	207
3	Simulation und Zufallszahlen . . . . .	213
3.1	Begriffserklärungen und Beispiele . . . . .	213
3.2	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	226
4	Diskrete Zufallsvariable, Erwartungswert und Varianz . . . . .	229
4.1	Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	229
4.2	Kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen . . . . .	237
4.3	Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen . . . . .	239
4.3.1	Erwartungswert . . . . .	239
4.3.2	Varianz . . . . .	245
4.4	Mehrere Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum . . . . .	250
4.4.1	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	250
4.4.2	Erwartungswert einer Summe diskreter Zufallsvariabler . . . . .	252
4.4.3	Varianz einer Summe diskreter Zufallsvariabler . . . . .	253
4.5	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	255
5	Spezielle diskrete Verteilungen . . . . .	259
5.1	Binomialverteilung . . . . .	259
5.2	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	263
5.3	Zusammenhang zwischen Verteilungen . . . . .	267
5.4	Geometrische Verteilung (Pascal-Verteilung) . . . . .	269
5.5	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	273
6	Ungleichung von Tschebyscheff für diskrete Zufallsvariable und Schwaches Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	275
6.1	Ungleichung von Tschebyscheff . . . . .	275
6.2	Schwaches Gesetz der großen Zahlen . . . . .	279
6.3	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	282
7	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	283
7.1	Abzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	284
7.2	Überabzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	286

7.2.1	Die Menge $\mathbb{IR}$ und das System der Borelmengen auf $\mathbb{IR}$ . . . . .	286
7.2.2	Abstrakte Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	290
7.3	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	292
8	<b>Wahrscheinlichkeitsmaße auf <math>(\mathbb{IR}, \mathcal{B}(\mathcal{I}))</math></b> . . . . .	293
8.1	Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen . . . . .	295
8.2	Verteilungsfunktionen zu vorgegebenen Dichtefunktionen . . . . .	300
8.2.1	Konstruktion einer stetigen Verteilungsfunktion zu einer Dichtefunktion . . . . .	300
8.2.2	Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Integrale über eine Dichtefunktion . . . . .	301
8.3	Rechteckverteilung . . . . .	303
8.4	Exponentialverteilung . . . . .	304
8.5	Normalverteilung (Gauß-Verteilung) . . . . .	308
8.5.1	Eigenschaften der Dichtefunktion . . . . .	309
8.5.2	Die Standard-Normalverteilung . . . . .	311
8.5.3	Approximation der Binomialverteilung mittels der Normalverteilung . . . . .	316
8.5.4	Die Sigma-Regeln für die Normalverteilung . . . . .	318
8.6	Erwartungswert und Varianz für Verteilungsfunktionen . . . . .	319
8.7	Ausblick: Abstrakte Zufallsvariable . . . . .	325
8.7.1	Messbare Abbildungen . . . . .	325
8.7.2	Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{IR}$ . . . . .	326
8.8	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	327
9	<b>Schätzen</b> . . . . .	331
9.1	Die Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	331
9.2	Schätzen von Erwartungswert und Varianz . . . . .	337
9.3	Konfidenzintervalle . . . . .	342
9.3.1	Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit bei einer binomialverteilten Zufallsvariablen . . . . .	342
9.3.2	Konfidenzintervalle bei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Funktionen . . . . .	345
9.4	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	347
10	<b>Testen</b> . . . . .	349
10.1	Einseitige Tests . . . . .	349
10.2	Zweiseitige Tests . . . . .	353
10.3	Testen unter Verwendung der Normalverteilung . . . . .	356
10.4	Zusammenfassung zum Thema „Hypothesentest“ . . . . .	360
10.5	Qualitätskontrolle . . . . .	361
10.6	Aufgaben und Ergänzungen . . . . .	372
11	<b>Lösungshinweise zu den Aufgaben</b> . . . . .	375
11.1	Aufgaben aus Kapitel 1, Abschnitt 1.2.8 . . . . .	375
11.2	Aufgaben aus Kapitel 2 . . . . .	379

11.2.1 Abschnitt 2.3.2 .....	379
11.2.2 Abschnitt 2.5.2 .....	379
11.2.3 Abschnitt 2.6.5 .....	380
11.2.4 Abschnitt 2.7.2 .....	380
11.2.5 Abschnitt 2.8.6 .....	381
11.2.6 Abschnitt 2.9.4 .....	382
11.3 Aufgaben aus Kapitel 3, Abschnitt 3.2 .....	385
11.4 Aufgaben aus Kapitel 4, Abschnitt 4.5 .....	387
11.5 Aufgaben aus Kapitel 5, Abschnitt 5.5 .....	390
11.6 Aufgaben aus Kapitel 6, Abschnitt 6.3 .....	391
11.7 Aufgaben aus Kapitel 7, Abschnitt 7.3 .....	392
11.8 Aufgaben aus Kapitel 8, Abschnitt 8.8 .....	393
11.9 Aufgaben aus Kapitel 9, Abschnitt 9.4 .....	395
11.10 Aufgaben aus Kapitel 10, Abschnitt 10.6 .....	398
Literaturverzeichnis .....	403
Index .....	411