

Inhaltsverzeichnis

1	Beschreibende Statistik	1
1.1	Die historische Entwicklung der Statistik – ein kurzer Abriss	1
1.1.1	Die Amtliche Statistik	2
1.1.2	Die Politische Arithmetik	5
1.1.3	Die Universitätsstatistik und ihre Weiterentwicklung	5
1.2	Grundbegriffe der beschreibenden Statistik und Aufbereitung der Daten	8
1.2.1	Statistische Erhebung, Daten, Merkmale, Merkmalsausprägungen	8
1.2.2	Graphische Darstellungen von Daten	14
1.2.3	Lageparameter	29
1.2.4	Streuungsparameter	45
1.2.5	Lineare Regression	53
1.2.6	Korrelation	61
1.2.7	Fehler und Manipulationsmöglichkeiten	65
1.2.8	Aufgaben und Ergänzungen	65
2	Wahrscheinlichkeit	71
2.1	Zufall und Wahrscheinlichkeit	71
2.2	Mathematik des Zufalls	72
2.3	Entwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeit	76
2.3.1	Berühmte historische Beispiele und einige interessante Briefwechsel	76
2.3.2	Aufgaben und Ergänzungen	84
2.4	Zur geschichtlichen Entwicklung der Stochastik	85
2.5	Schritte zur Mathematisierung	89
2.5.1	Zum Modellbildungsprozess	89
2.5.2	Aufgaben und Ergänzungen	96
2.6	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 1)	97
2.6.1	Das Axiomensystem von Kolmogoroff	97
2.6.2	Folgerungen aus dem Axiomensystem – Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	103
2.6.3	Ein zum Axiomensystem von Kolmogoroff äquivalentes Axiomensystem	112
2.6.4	Die Laplace-Verteilung (Gleichverteilung)	115
2.6.5	Aufgaben und Ergänzungen	119
2.7	Geometrische Wahrscheinlichkeiten	121
2.7.1	Vier Beispiele: Glücksrad, Zielscheibe, Paradoxon von Bertrand, Nadelproblem von Buffon	121
2.7.2	Aufgaben und Ergänzungen	128
2.8	Kombinatorisches Zählen	129

2.8.1	Abzählen	129
2.8.2	Allgemeines Zählprinzip der Kombinatorik	131
2.8.3	Kombinatorische Figuren	137
2.8.4	Anwendungen der kombinatorischen Figuren	153
2.8.5	Vier-Schritt-Modell zur Lösung von Kombinatorikaufgaben – Ein didaktischer Aspekt	162
2.8.6	Aufgaben und Ergänzungen	165
2.9	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 2)	168
2.9.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit – Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	168
2.9.2	Bernoulli-Ketten	187
2.9.3	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes	194
2.9.4	Aufgaben und Ergänzungen	207
3	Simulation und Zufallszahlen	213
3.1	Begriffserklärungen und Beispiele	213
3.2	Aufgaben und Ergänzungen	226
4	Diskrete Zufallsvariable, Erwartungswert und Varianz	229
4.1	Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung	229
4.2	Kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	237
4.3	Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen	239
4.3.1	Erwartungswert	239
4.3.2	Varianz	245
4.4	Mehrere Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum	250
4.4.1	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	250
4.4.2	Erwartungswert einer Summe diskreter Zufallsvariabler	252
4.4.3	Varianz einer Summe diskreter Zufallsvariabler	253
4.5	Aufgaben und Ergänzungen	255
5	Spezielle diskrete Verteilungen	259
5.1	Binomialverteilung	259
5.2	Hypergeometrische Verteilung	263
5.3	Zusammenhang zwischen Verteilungen	267
5.4	Geometrische Verteilung (Pascal-Verteilung)	269
5.5	Aufgaben und Ergänzungen	273
6	Ungleichung von Tschebyscheff für diskrete Zufallsvariable und Schwaches Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	275
6.1	Ungleichung von Tschebyscheff	275
6.2	Schwaches Gesetz der großen Zahlen	279
6.3	Aufgaben und Ergänzungen	282
7	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume	283
7.1	Abzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume	284
7.2	Überabzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume	286

7.2.1	Die Menge \mathbb{R} und das System der Borelmengen auf \mathbb{R}	286
7.2.2	Abstrakte Wahrscheinlichkeitsräume	290
7.3	Aufgaben und Ergänzungen	292
8	Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$	293
8.1	Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen	295
8.2	Verteilungsfunktionen zu vorgegebenen Dichtefunktionen	300
8.2.1	Konstruktion einer stetigen Verteilungsfunktion zu einer Dichtefunktion	300
8.2.2	Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Integrale über eine Dichtefunktion	301
8.3	Rechteckverteilung	303
8.4	Exponentialverteilung	304
8.5	Normalverteilung (Gauß-Verteilung)	308
8.5.1	Eigenschaften der Dichtefunktion	309
8.5.2	Die Standard-Normalverteilung	311
8.5.3	Approximation der Binomialverteilung mittels der Normal- verteilung	316
8.5.4	Die Sigma-Regeln für die Normalverteilung	318
8.6	Erwartungswert und Varianz für Verteilungsfunktionen	319
8.7	Ausblick: Abstrakte Zufallsvariable	325
8.7.1	Messbare Abbildungen	325
8.7.2	Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R}	326
8.8	Aufgaben und Ergänzungen	327
9	Schätzen	331
9.1	Die Maximum-Likelihood-Methode	331
9.2	Schätzen von Erwartungswert und Varianz	337
9.3	Konfidenzintervalle	342
9.3.1	Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit bei einer bi- nomialverteilten Zufallsvariablen	342
9.3.2	Konfidenzintervalle bei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Funktionen	345
9.4	Aufgaben und Ergänzungen	347
10	Testen	349
10.1	Einseitige Tests	349
10.2	Zweiseitige Tests	353
10.3	Testen unter Verwendung der Normalverteilung	356
10.4	Zusammenfassung zum Thema „Hypothesentest“	360
10.5	Qualitätskontrolle	361
10.6	Aufgaben und Ergänzungen	372
11	Lösungshinweise zu den Aufgaben	375
11.1	Aufgaben aus Kapitel 1, Abschnitt 1.2.8	375
11.2	Aufgaben aus Kapitel 2	379

11.2.1 Abschnitt 2.3.2	379
11.2.2 Abschnitt 2.5.2	379
11.2.3 Abschnitt 2.6.5	380
11.2.4 Abschnitt 2.7.2	380
11.2.5 Abschnitt 2.8.6	381
11.2.6 Abschnitt 2.9.4	382
11.3 Aufgaben aus Kapitel 3, Abschnitt 3.2	385
11.4 Aufgaben aus Kapitel 4, Abschnitt 4.5	387
11.5 Aufgaben aus Kapitel 5, Abschnitt 5.5	390
11.6 Aufgaben aus Kapitel 6, Abschnitt 6.3	391
11.7 Aufgaben aus Kapitel 7, Abschnitt 7.3	392
11.8 Aufgaben aus Kapitel 8, Abschnitt 8.8	393
11.9 Aufgaben aus Kapitel 9, Abschnitt 9.4	395
11.10 Aufgaben aus Kapitel 10, Abschnitt 10.6	398
Literaturverzeichnis	403
Index	411