

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Koordinatensystem . . . . .	5
2.2 Koordinatentransformation . . . . .	7
2.3 Indexschreibweise . . . . .	9
2.4 Tensoren . . . . .	11
2.5 Tensoroperationen . . . . .	14
2.6 Ableitungen eines Tensorfeldes . . . . .	15
2.7 Divergenztheorem . . . . .	16
2.8 TAYLORreihenentwicklung . . . . .	18
<b>3 Grundlagen der Elastizitätstheorie</b>	<b>19</b>
3.1 Kinematische Beziehungen . . . . .	19
3.1.1 Verschiebungs- und Verzerrungszustand . . . . .	19
3.1.2 Linearisierter Verzerrungstensor . . . . .	25
3.1.3 Starrkörperbewegung bei kleinen Verschiebungsableitungen . . . . .	27
3.1.4 Transformation der Komponenten des Verzerrungstensors . . . . .	27
3.1.5 Hauptverzerrungen und Verzerrungshauptrichtungen . . . . .	28
3.1.6 Volumen- und gestaltändernder Anteil des Verzerrungstensors bei kleinen Verzerrungen . . . . .	31
3.1.7 Kompatibilitätsbedingungen für die Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors . . . . .	33
3.1.8 Ebener Verzerrungszustand . . . . .	34
3.1.9 Kinematische Beziehungen in Zylinderkoordinaten . . . . .	36
3.1.10 Linearisierte kinematische Beziehungen bei Rotationssymmetrie des Verzerrungszustandes . . . . .	38
3.2 Kinetische Beziehungen . . . . .	39
3.2.1 Grundgesetz der Dynamik . . . . .	39
3.2.2 Spannungsvektor . . . . .	40
3.2.3 CAUCHY'scher Spannungstensor . . . . .	41
3.2.4 CAUCHY'sche Bewegungsgleichungen . . . . .	42
3.2.5 CAUCHY'sche Formeln . . . . .	45
3.2.6 Transformation der Komponenten des Spannungstensors . . . . .	47
3.2.7 Hauptspannungen und Spannungshauptrichtungen . . . . .	48
3.2.8 Hauptschubspannungen . . . . .	50
3.2.9 MOHR'sche Spannungskreise . . . . .	52
3.2.10 Hydrostatischer und deviatorischer Anteil des Spannungstensors	53
3.2.11 Ebener Spannungszustand . . . . .	54

3.2.12	CAUCHY'sche Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten . . . . .	59
3.2.13	CAUCHY'sche Bewegungsgleichungen bei Rotationssymmetrie des Spannungszustandes . . . . .	62
3.2.14	Erster und zweiter PIOLA-KIRCHHOFF'scher Spannungstensor . . . . .	63
3.2.15	Bewegungsgleichungen in LAGRANGE'schen Koordinaten . . . . .	66
3.3	Konstitutive Beziehungen . . . . .	68
3.3.1	Einleitung . . . . .	68
3.3.2	Spannungs-Dehnungsdiagramme aus einaxialen Versuchen . . . . .	71
3.3.3	Charakteristische Werkstoffkenngrößen und ihre Bemessungswerte . . . . .	77
3.3.4	Wahre Spannung und wahre Dehnung . . . . .	78
3.3.5	Querdehnung . . . . .	79
3.3.6	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz . . . . .	80
3.3.7	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz bei Berücksichtigung von Wärmedehnungen . . . . .	88
3.3.8	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand . . . . .	90
3.3.9	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für den ebenen Verzerrungszustand . . . . .	91
3.3.10	Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für Rotationssymmetrie . . . . .	91
3.4	Zusammenfassung der grundlegenden Gleichungen . . . . .	92
3.5	Verschiebungs- und Spannungsformulierung in linearer Elastizitätstheorie . . . . .	96
3.6	Beispiel zur Anwendung der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	97
3.7	SAINT-VENANT'sches Prinzip . . . . .	104
4	<b>Prinzipien der virtuellen Arbeiten</b> . . . . .	107
4.1	Einleitung . . . . .	107
4.2	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	107
4.2.1	Virtuelle Verschiebung . . . . .	107
4.2.2	Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der EULER'schen Fassung . . . . .	108
4.2.3	Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der LAGRANGE'schen Fassung . . . . .	111
4.2.4	Inkrementelle Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in der LAGRANGE'schen Fassung . . . . .	119
4.3	Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	125
4.3.1	Virtuelle Kräfte bei statischer Beanspruchung . . . . .	125
4.3.2	Prinzip der virtuellen Kräfte bei statischer Beanspruchung und kleinen Verschiebungen . . . . .	126
4.4	Reziprozitätssätze . . . . .	130
5	<b>Energieprinzipien</b> . . . . .	135
5.1	Mechanische Energie . . . . .	135
5.2	Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie . . . . .	135
5.3	Verzerrungsenergie, Ergänzungsergie . . . . .	139
5.4	Eindeutigkeitssatz von KIRCHHOFF . . . . .	144
5.5	Stationaritätsprinzipien . . . . .	146
5.6	MinimalprinzipienMinimalprinzip . . . . .	150

<b>6 Lineare Stabtheorie</b>	<b>153</b>
6.1 Allgemeines . . . . .	153
6.2 Spannungen und Schnittgrößen . . . . .	154
6.3 Kinematische Hypothese . . . . .	157
6.4 Normalspannungen . . . . .	157
6.4.1 Ermittlung der Flächenmomente eines Querschnitts . . . . .	159
6.4.2 Axiale Beanspruchung . . . . .	165
6.4.3 Reine Biegung um eine Hauptachse des Querschnitts . . . . .	173
6.4.4 Reine Biegung um eine beliebige Querschnittsachse . . . . .	180
6.4.5 Beanspruchung durch Normalkraft und Biegemoment . . . . .	185
6.4.6 Kern des Querschnitts . . . . .	186
6.4.7 Berücksichtigung von Wärmedehnungen . . . . .	188
6.4.8 Normalspannungen in Verbundstäben . . . . .	191
6.5 Schubspannungen . . . . .	192
6.5.1 Allgemeines . . . . .	192
6.5.2 Beziehungen zwischen Belastung und Querkraft bzw. zwischen Querkraft und Biegemoment . . . . .	194
6.5.3 Querkraftschubspannungen in dünnwandigen offenen Querschnitten . . . . .	201
6.5.4 Querkraftschubspannungen in Vollquerschnitten . . . . .	205
6.5.5 Schubspannungen zufolge reiner Torsion in Vollquerschnitten .	206
6.5.6 Schubspannungen zufolge reiner Torsion in schmalen Rechteckquerschnitten . . . . .	214
6.5.7 Schubspannungen zufolge reiner Torsion in allgemeinen dünnwandigen offenen Querschnitten . . . . .	217
6.5.8 Schubspannungen zufolge reiner Torsion in dünnwandigen einzelligen Hohlquerschnitten . . . . .	218
6.5.9 Schubspannungen zufolge reiner Torsion in dünnwandigen mehrzelligen Hohlquerschnitten . . . . .	221
6.5.10 Querkraftschubspannungen in dünnwandigen geschlossenen Querschnitten . . . . .	224
6.5.11 Schubmittelpunkt . . . . .	225
6.5.12 Wölbkrafttorsion . . . . .	229
6.6 Zusammengesetzte Beanspruchung . . . . .	230
6.7 Biegelinie . . . . .	230
6.7.1 Differentialgleichung der Biegelinie . . . . .	230
6.7.2 Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie . . . . .	232
6.7.3 Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie mittels singulärer Funktionen . . . . .	237
6.7.4 Differentialgleichung der Biegelinie für elastisch gebettete Stäbe . . . . .	241
6.7.5 Erregte ungedämpfte Schwingungen eines Biegestabes . . . . .	244
6.7.6 Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegung . . . . .	250
<b>7 Prinzipien der virtuellen Arbeiten in der linearen Stabtheorie</b>	<b>255</b>
7.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	255
7.1.1 Allgemeines . . . . .	255
7.1.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für axiale Beanspruchung . . . . .	255

7.1.3	Prinzip der virtuellen Verschiebungen für ideale Fachwerke . . . . .	256
7.1.4	Prinzip der virtuellen Verschiebungen für reine Biegung um eine Querschnittshauptachse . . . . .	259
7.1.5	Prinzip der virtuellen Verschiebungen für zusammengesetzte Beanspruchung . . . . .	262
7.2	Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	265
7.2.1	Allgemeines . . . . .	265
7.2.2	Prinzip der virtuellen Kräfte für axiale Beanspruchung . . . . .	265
7.2.3	Prinzip der virtuellen Kräfte für ideale Fachwerke . . . . .	266
7.2.4	Prinzip der virtuellen Kräfte für reine Biegung um eine Querschnittshauptachse . . . . .	269
7.2.5	Prinzip der virtuellen Kräfte für zusammengesetzte Beanspruchung . . . . .	272
<b>8</b>	<b>Lineare Theorie ebener Flächentragwerke</b>	<b>279</b>
8.1	Einleitung . . . . .	279
8.2	Scheiben . . . . .	281
8.2.1	Grundlegende Gleichungen . . . . .	281
8.2.2	Spannungsformulierung in rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten . . . . .	284
8.2.3	Spannungsformulierung in Polarkoordinaten . . . . .	290
8.2.4	Verschiebungsformulierung . . . . .	296
8.3	KIRCHHOFF'sche Plattentheorie . . . . .	299
8.3.1	Plattengleichung . . . . .	299
8.3.2	Transformation und Extremwerte der Schnittgrößen . . . . .	304
8.3.3	Randbedingungen . . . . .	305
<b>9</b>	<b>Stabilitätsprobleme</b>	<b>319</b>
9.1	Stabilitätsgrenze . . . . .	319
9.1.1	Verzweigungsprobleme . . . . .	321
9.1.2	Durchschlagprobleme . . . . .	327
9.1.3	Traglastprobleme . . . . .	332
9.2	Kriterium zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze . . . . .	334
9.3	Biegeknicken . . . . .	336
9.3.1	Allgemeines . . . . .	336
9.3.2	Biegeknicken bei linear elastischem Materialverhalten . . . . .	336
9.3.3	Biegeknicken bei nichtlinearem Materialverhalten . . . . .	346
9.3.4	Große Ausbiegungen elastischer Stäbe beim Biegeknicken . . . . .	348
9.4	Exzentrisch gedrückter Stab . . . . .	349
9.5	Beulen . . . . .	353
9.5.1	VON KÁRMÁN'sche Plattentheorie . . . . .	354
9.5.2	Anwendung der VON KÁRMÁN'schen Plattentheorie . . . . .	358
9.6	Durch Membrankräfte und Querbelastung beanspruchte Platte . . . . .	361
<b>10</b>	<b>Anstrengungshypothesen</b>	<b>363</b>
10.1	Allgemeines . . . . .	363
10.2	Geometrische Interpretation von Spannungszuständen . . . . .	364
10.3	Fließhypothesen mit einem Werkstoffkennwert . . . . .	366
10.3.1	Fließhypothese nach TRESCA . . . . .	366

10.3.2 Fließhypothese nach VON MISES . . . . .	369
10.4 Bruchhypothese mit einem Werkstoffkennwert . . . . .	372
10.4.1 Bruchhypothese nach RANKINE . . . . .	372
10.5 Versagenshypothesen mit zwei Werkstoffkennwerten . . . . .	373
10.5.1 Versagenshypothese nach MOHR-COULOMB . . . . .	374
10.5.2 Versagenshypothese nach DRUCKER-PRAGER . . . . .	377
<b>11 Nichtlinear elastisches und anelastisches Materialverhalten</b> . . . . .	<b>379</b>
11.1 Allgemeines . . . . .	379
11.2 Nichtlinear elastisches Materialverhalten . . . . .	379
11.3 Anelastisches Materialverhalten . . . . .	381
11.3.1 Allgemeines . . . . .	381
11.3.2 Plastisches Materialverhalten . . . . .	382
bei einaxialem Spannungszustand . . . . .	382
11.3.3 Zeitabhängiges Materialverhalten . . . . .	385
bei einaxialem Spannungszustand . . . . .	385
<b>12 Fließgelenkthéorie I. Ordnung für Stäbe</b> . . . . .	<b>397</b>
12.1 Allgemeines . . . . .	397
12.2 Axiale Beanspruchung und reine Biegung . . . . .	398
12.2.1 Axiale Beanspruchung . . . . .	398
12.2.2 Reine Biegung . . . . .	400
12.3 Schnittgrößen-Interaktionsbeziehungen . . . . .	409
12.3.1 Schnittgrößen-Interaktionsbeziehungen für Biegemoment und Normalkraft . . . . .	409
12.3.2 Schnittgrößen-Interaktionsbeziehungen für Biegemoment und Querkraft . . . . .	412
12.3.3 Schnittgrößen-Interaktionsbeziehungen für Normal- und Querkraft . . . . .	414
12.3.4 Schnittgrößen-Interaktionsbeziehungen für Biegemoment, Normalkraft und Querkraft . . . . .	416
12.4 Ermittlung der Traglast . . . . .	416
12.5 Beschränkungen bei der Ausnutzung elasto-plastischen Materialverhaltens . . . . .	417
<b>13 Grundlagen der Plastizitätstheorie</b> . . . . .	<b>421</b>
13.1 Einleitung . . . . .	421
13.2 Elasto-plastische Werkstoffgesetze . . . . .	422
13.2.1 Fließfunktion . . . . .	422
13.2.2 Fließregel . . . . .	422
13.2.3 Verfestigungsgesetz . . . . .	426
13.2.4 Belastungs- und Entlastungsbedingungen . . . . .	429
13.2.5 Ermittlung des Konsistenzparameters und des elasto-plastischen Materialtensors . . . . .	429
13.2.6 Elasto-plastisches Werkstoffgesetz auf der Grundlage der Versagenshypothese nach DRUCKER-PRAGER . . . . .	431
13.3 Beispiel zur Anwendung der Plastizitätstheorie . . . . .	432
13.3.1 Ermittlung der Hauptnormalspannungen $\sigma_r$ und $\sigma_\beta$ . . . . .	433
13.3.2 Ermittlung der Verschiebung . . . . .	435

13.3.3 Ermittlung der Hauptnormalspannung $\sigma_z$ . . . . .	438
13.4 Elasto-viskoplastische Werkstoffgesetze . . . . .	439
<b>14 Traglastsätze der Plastizitätstheorie</b>	<b>443</b>
14.1 Allgemeines . . . . .	443
14.2 Statischer Traglastsatz . . . . .	445
14.3 Kinematischer Traglastsatz . . . . .	446
14.4 Beispiele zu den Traglastsätzen . . . . .	447
14.4.1 Beispiele aus der Stabtheorie . . . . .	447
14.4.2 Beispiel für einen ebenen Spannungszustand . . . . .	451
14.4.3 Beispiele aus der Geotechnik . . . . .	452
<b>15 Näherungslösungen</b>	<b>457</b>
15.1 Allgemeines . . . . .	457
15.2 Verfahren von RITZ . . . . .	457
15.3 Verfahren von GALERKIN . . . . .	464
15.4 Methode der finiten Elemente . . . . .	468
15.4.1 Motivation . . . . .	468
15.4.2 Finites Element zur Diskretisierung ebener konservativer linearer Systeme . . . . .	468
15.4.3 Diskretisierte ebene konservative lineare Systeme . . . . .	473
15.4.4 Diskretisierte nichtkonservative lineare Systeme . . . . .	478
15.4.5 Diskretisierte nichtlineare Systeme . . . . .	479
15.4.6 Wesentliche Gesichtspunkte bei praktischen Berechnungen . . . . .	480
15.4.7 Beispiel zur Anwendung der Methode der finiten Elemente . . . . .	481
15.5 Randelementmethode . . . . .	489
15.5.1 Motivation . . . . .	489
15.5.2 Grundlegende Gleichungen . . . . .	489
15.5.3 Diskretisierung . . . . .	493
15.5.4 Spannungsberechnung . . . . .	496
<b>16 Experimentelle Methoden</b>	<b>497</b>
16.1 Allgemeines . . . . .	497
16.2 Elektrisches Messen mechanischer Größen . . . . .	498
16.2.1 Dehnungsmessstreifen . . . . .	499
16.2.2 Messwertaufnehmer auf DMS-Basis . . . . .	508
16.2.3 Potentiometeraufnehmer . . . . .	509
16.2.4 Induktive Aufnehmer . . . . .	510
16.2.5 Kapazitive Aufnehmer . . . . .	511
16.2.6 Schwingsaitenaufnehmer . . . . .	512
16.2.7 Piezoelektrische Aufnehmer . . . . .	513
16.3 Optische Messverfahren . . . . .	513
16.3.1 Spannungsoptik . . . . .	514
16.3.2 Moiréverfahren . . . . .	518
16.3.3 Speckle-Interferometrie . . . . .	521
16.3.4 Beispiel zur Anwendung der Speckle-Interferometrie . . . . .	528
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>533</b>

<b><i>Inhaltsverzeichnis</i></b>	<b>XV</b>
<b>Namenverzeichnis</b>	<b>538</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>539</b>