

# Inhaltsverzeichnis

<b>Über den Autor</b>	<b>9</b>
<b>Danksagung</b>	<b>9</b>
<b>Einleitung</b>	<b>17</b>
Zu diesem Buch	17
Konventionen in diesem Buch	18
Törichte Annahmen über den Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	18
Teil I: Grundlegende lineare Algebra	19
Teil II: Viel mehr lineare Algebra	19
Teil III: Eindimensionale Analysis	19
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	20
Symbole in diesem Buch	20
Wie es weitergeht	21
 <b>Teil I</b>	
<b>Grundlegende lineare Algebra</b>	<b>23</b>
 <b>Kapitel 1</b>	
<b>Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen und Zahlen</b>	<b>25</b>
Aussagenlogik – die Sprache der Mathematik verstehen	25
Wörter erfinden: die Definition	26
Wörter verbinden: die Aussage	27
Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik	27
Logisch schreiben: Symbole, Symbole	29
Mengen und Relationen	29
Eine Menge Mengen	30
Verbundmengen	33
Zahlen, Zahlen, noch mehr Zahlen	33
Mit Hilfe der Logik zählen lernen	34
Die Sache mit den Schulden – Negative Zahlen	36
Die ganzen Zahlen zerbrechen – Rationale Zahlen	36
Da fehlt doch was – Reelle Zahlen	37
Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen	40
Eine Wurzel aus $-1$ : Die komplexen Zahlen entstehen	41
Rechnen mit komplexen Zahlen	43

Polarkoordinaten	46
Komplexes Potenzieren und Wurzelziehen	48

## **Kapitel 2**

### **Von Vektoren und Matrizen 51**

Vektorräume	51
Mehr als Pfeile	52
Weitere Vektorräume entdecken	54
Vektorrechnung mit octave	57
Sind sie abhängig?	60
Eine Basis eröffnet die Dimensionen	63
Skalarprodukte und Normen: Längenmessung!	64
Lineare Abbildungen	70
Ganz einfach linear! Eine formale Definition der linearen Abbildung	70
Dies also ist der Abbildung Kern	72
Lineare Abbildungen und Spaltenvektoren	74
Mehrspaltiges: Matrizen	76
Zeilen zuerst, Spalten später	76
Matrizenräume sind Vektorräume	78
Matrixalgebra – mancherlei Matrizen multiplizieren	78
Matrizen sind – lineare Abbildungen!	85

## **Kapitel 3**

### **Lineare Gleichungssysteme 89**

Matrizen und lineare Gleichungssysteme	89
Für Schreibfaule – kurz und knapp mit Matrizen	90
Ja, geht das denn? Die Kerne kehren zurück	91
Matrizenadel: Von Zeilen- und Spaltenrang	93
Ja, das geht! Der Rang macht's möglich: Lösbarkeit	98
Determinanten bestimmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme	100
Bäumchen wechsele dich oder Permutationen	100
Igitt! Determinanten	103
Nicht gar so eklig: Rekursiv geht's gut!	104
Rechnen mit Determinanten und nochmal: Lösbarkeit von Gleichungssystemen	108
Inverse Matrix – Kehrwerte bei Matrizen	110
Gauß-Algorithmus: Im Halbschlaf Gleichungssysteme lösen	115
Gestaffelt ist's einfach – Rückwärtslösen	115
Endlich konkret: das Eliminationsverfahren	117
Abhängige Spalten, was nun?	121
Aufwand für Gauß und Cramer	124
Nicht nur einzelne Gleichungssysteme: Berechnung der Inversen	125

## **Teil II**

### ***Viel mehr lineare Algebra***

**131**

#### ***Kapitel 4***

##### ***Eigenwerte und Eigenvektoren***

**133**

Das Eigenwertproblem – kein Minderwertigkeitskomplex	133
Ganz charakteristisch, die Gleichung	135
Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms	136
Ganz allein meine! Berechnung der Eigenvektoren	138
Einige Eigenschaften von Eigenwerten	141
Ein Platz für die Eigenvektoren: der Eigenraum	143
Eigenwerte von Dreiecks- und Diagonalmatrizen	145
Ähnliche Matrizen	146
Diagonalähnliche Matrizen	147
Symmetrische und hermitesche Matrizen	149
Symmetrische Matrizen	150
Orthonormierte Eigenvektoren	153
Orthogonalmatrizen	154
Symmetrische und orthogonale Matrizen	156

#### ***Kapitel 5***

##### ***Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung***

**157**

Ellipsengleichungen und quadratische Formen	157
Basiswechsel	160
Hauptachsentransformation	161
Der Physik auf der Spur: Lineare Ausgleichsrechnung	163
Orthogonalität	165
Orthogonalprojektion	166
Ausgleichsrechnung praktisch	167

#### ***Kapitel 6***

##### ***Ein wenig Dreidimensionales***

**173**

Nicht nur für Piloten: Orientierung in 3D	173
Oben und unten – Ebenen unterteilen den Raum	173
Das Vektorprodukt	176

**Teil III****Eindimensionale Analysis****183****Kapitel 7****Folgen und Grenzwerte****185**

Räume mit Abstand	185
Topologie: die Frage nach den nachbarschaftlichen Beziehungen	185
Rand- und innere Punkte	189
Häufungspunkte	192
Folgen	195
Grenzwerte von Folgen	198
Cauchy-Folgen	200
Auf dem Weg zur Analysis: Reelle Zahlenfolgen	203
Mit den Folgen rechnen	204

**Kapitel 8****Stetigkeit****209**

Grenzwerte reellwertiger Funktionen	209
Rechenregeln für Grenzwerte einer Funktion	212
Springen oder nicht springen: Stetigkeit	214
Ohne abzusetzen oder $\varepsilon$ - $\delta$ : Stetigkeitsdefinitionen	215
Rechenregeln für stetige Funktionen	216
Eigenschaften stetiger Funktionen	217

**Kapitel 9****Differentialrechnung****221**

Die Ableitung	221
Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten	221
Und geometrisch ist das auch!	224
Vorsicht: Nicht knicken! Differenzieren und Stetigkeit	225
Die Ableitung regeln	228
Ableitungsketten – verschachtelte Funktionen	231
Haufenweise Beispiele zur Kettenregel	232
Ableitung von Umkehrfunktionen	236
Wiederholtes Differenzieren: Höhere Ableitungen	238
Play it again, Sam! Ableitungen ableiten	238
Funktionen vom Feinsten – stetige Differenzierbarkeit	240
Ganz oben und ganz unten – Maxima und Minima	242
Globale und lokale Extremstellen	242
Bestimmung von Extremstellen	243

Der Mittelwertsatz – gerade mit krumm vergleichen	245
Ein Extremum muss sein: der Satz von Rolle	246
Schief geht es auch: der Mittelwertsatz	247
Grenzwerte ableiten und die Regeln von de l'Hospital	248
Kurvendiskussion	252

## **Kapitel 10**

### ***Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale*** **261**

Ein bestimmtes Integral	261
Krummlinige Flächen berechnen	262
Einfache Rechenregeln für bestimmte Integrale	267
Und jetzt umgekehrt: Stammfunktionen	270
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	271
Das unbestimmte Integral	274
Alle meine Stammfunktionen	274
Nicht auf Sand gebaut: Grundintegrale	277
Was ist eigentlich ein uneigentliches Integral?	278
Die Sache mit den Randpunkten	278
Und wieder einmal: Grenzwerte	280
Vergleichskriterien	281
Parameterintegrale	285
Eigenschaften eigentlicher Parameterintegrale	285
Variable Integrationsgrenzen	287
Uneigentliche Parameterintegrale	289

## **Kapitel 11**

### ***Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst!*** **291**

Scheibchenweise integrieren: Partielle Integration	291
Hier hilft die Produktregel	291
Unbestimmt: Partielle Integration zur Bestimmung von Stammfunktionen	292
Und bestimmt! Partielle Integration bei bestimmten Integralen	295
Die Schwierigkeiten verstecken: Substitution	297
Hin- und hersubstituieren	298
Sinus- und Kosinusintegrale	299
Und noch eine Variante der Substitution	301
Partialbruchzerlegung – Integrale rationaler Funktionen	303
Zerlegung in einfache Brüche	304
Zwei Sorten Partialbrüche bleiben übrig	305
Partialbruchzerlegung bei unbestimmter Integration	310

**Kapitel 12****Reihen 313**

Immer längere Summen: Unendliche Reihen	313
Bausteine stapeln oder Schildkrötenrennen	314
Alternierende Reihen: Schritt vor, Schritt zurück	321
Absolute Konvergenz? Unbedingt!	321
Wann konvergiert's? – Cauchy, Leibniz und Co	325
Potenzreihen	330
Potenzreihen oder unendlich lange Polynome	330
Wo konvergiert's denn?	331
Was ist das denn? Eine Funktion!	334
Differentiation und Integration von Potenzreihen – Stück für Stück	339
Taylorreihen	342
Funktionen ertasten: Approximation durch Polynome	343
Den Spieß umdrehen – Funktionen als Reihe	344
Des Schneiders Trickkiste: Taylorentwicklung für Dummies	350

**Teil IV****Der Top-Ten-Teil 353****Kapitel 13****Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra 355****Kapitel 14****Zehn wichtige Punkte in der Analysis 359****Kapitel 15****Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt 363**

Mathematik und Psychologie	363
Nicht locker lassen!	364
Glauben Sie nichts!	365
Üben Sie! Üben Sie!	366

**Anhang A****Lösungen der Aufgaben 367****Stichwortverzeichnis 383**