

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Sprechweisen, Symbole und Mengen	1
1.1 Sprechweisen und Symbole der Mathematik	1
1.2 Summen- und Produktzeichen	4
1.3 Potenzen und Wurzeln	5
1.4 Symbole der Mengenlehre	5
2 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	9
2.1 Die natürlichen Zahlen	9
2.2 Die ganzen Zahlen	13
2.3 Die rationalen Zahlen	13
3 Die reellen Zahlen	16
3.1 Grundlegendes	16
3.2 Reelle Intervalle	17
3.3 Der Betrag einer reellen Zahl	18
3.4 n -te Wurzeln	19
3.5 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	20
3.6 Maximum, Minimum, Supremum und Infimum	21
4 Maschinenzahlen	24
4.1 b -adische Darstellung reeller Zahlen	24
4.2 Gleitpunktzahlen	26
5 Polynome	31
5.1 Polynome – Multiplikation und Division	31
5.2 Faktorisierung von Polynomen	35
5.3 Auswerten von Polynomen	37
5.4 Partialbruchzerlegung	38
6 Trigonometrische Funktionen	42
6.1 Sinus und Kosinus	42
6.2 Tangens und Kotangens	45
6.3 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	46
7 Komplexe Zahlen – Kartesische Koordinaten	50
7.1 Konstruktion von \mathbb{C}	50
7.2 Die imaginäre Einheit und weitere Begriffe	51
7.3 Der Fundamentalsatz der Algebra	53
8 Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten	56
8.1 Die Polardarstellung	56
8.2 Anwendungen der Polardarstellung	58

9	Lineare Gleichungssysteme	62
9.1	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	62
9.2	Der Rang einer Matrix	67
9.3	Homogene lineare Gleichungssysteme	69
10	Rechnen mit Matrizen	72
10.1	Definition von Matrizen und einige besondere Matrizen	72
10.2	Rechenoperationen	74
10.3	Invertieren von Matrizen	79
10.4	Rechenregeln	81
11	$L\,R$-Zerlegung einer Matrix	85
11.1	Motivation	85
11.2	Die $L\,R$ -Zerlegung – vereinfachte Variante	87
11.3	Die $L\,R$ -Zerlegung – allgemeine Variante	89
11.4	Die $L\,R$ -Zerlegung – mit Spaltenpivotsuche	92
12	Die Determinante	95
12.1	Definition der Determinante	95
12.2	Berechnung der Determinante	97
12.3	Anwendungen der Determinante	101
13	Vektorräume	105
13.1	Definition und wichtige Beispiele	105
13.2	Untervektorräume	108
14	Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit	111
14.1	Linearkombinationen	111
14.2	Das Erzeugnis von X	114
14.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit	115
15	Basen von Vektorräumen	119
15.1	Basen	119
15.2	Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungssysteme	124
16	Orthogonalität I	129
16.1	Skalarprodukte	129
16.2	Länge, Abstand, Winkel und Orthogonalität	132
16.3	Orthonormalbasen	133
16.4	Orthogonale Zerlegung und Linearkombination bezüglich einer ONB	134
16.5	Orthogonale Matrizen	137
17	Orthogonalität II	140
17.1	Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt	140
17.2	Das Vektor- und das Spatprodukt	143
17.3	Die orthogonale Projektion	146

18 Das lineare Ausgleichsproblem	150
18.1 Das lineare Ausgleichsproblem und seine Lösung	150
18.2 Die orthogonale Projektion	151
18.3 Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	153
18.4 Die Methode der kleinsten Quadrate	154
19 Die $Q R$-Zerlegung einer Matrix	160
19.1 Volle und reduzierte $Q R$ -Zerlegung	160
19.2 Konstruktion der $Q R$ -Zerlegung	161
19.3 Anwendungen der $Q R$ -Zerlegung	166
20 Folgen	169
20.1 Begriffe	169
20.2 Konvergenz und Divergenz von Folgen	172
21 Berechnung von Grenzwerten von Folgen	176
21.1 Grenzwertbestimmung bei einer expliziten Folge	176
21.2 Grenzwertbestimmung bei einer rekursiven Folge	179
22 Reihen	183
22.1 Definition und Beispiele	183
22.2 Konvergenzkriterien	185
23 Abbildungen	191
23.1 Begriffe und Beispiele	191
23.2 Verkettung, injektiv, surjektiv, bijektiv	193
23.3 Die Umkehrabbildung	197
23.4 Beschränkte und monotone Funktionen	199
24 Potenzreihen	202
24.1 Der Konvergenzbereich reeller Potenzreihen	202
24.2 Der Konvergenzbereich komplexer Potenzreihen	207
24.3 Die Exponential- und die Logarithmusfunktion	208
24.4 Die hyperbolischen Funktionen	210
25 Grenzwerte und Stetigkeit	213
25.1 Grenzwerte von Funktionen	213
25.2 Asymptoten von Funktionen	217
25.3 Stetigkeit	218
25.4 Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen	220
25.5 Das Bisektionsverfahren	221
26 Differentiation	224
26.1 Die Ableitung und die Ableitungsfunktion	224
26.2 Ableitungsregeln	227
26.3 Numerische Differentiation	231

27 Anwendungen der Differentialrechnung I	234
27.1 Monotonie	234
27.2 Lokale und globale Extrema	235
27.3 Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	237
27.4 Konvexität	241
27.5 Die Regel von L'Hospital	242
28 Anwendungen der Differentialrechnung II	245
28.1 Das Newtonverfahren	245
28.2 Taylorentwicklung	248
28.3 Bestimmung von Taylorreihen	251
29 Polynom- und Splineinterpolation	255
29.1 Polynominterpolation	255
29.2 Konstruktion kubischer Splines	259
30 Integration I	263
30.1 Das bestimmte Integral	263
30.2 Das unbestimmte Integral	267
31 Integration II	275
31.1 Integration rationaler Funktionen	275
31.2 Rationale Funktionen in Sinus und Kosinus	278
31.3 Numerische Integration	280
31.4 Volumina und Oberflächen von Rotationskörpern	283
32 Uneigentliche Integrale	285
32.1 Berechnung uneigentlicher Integrale	285
32.2 Das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale	288
33 Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	291
33.1 Erste Differentialgleichungen	291
33.2 Separierbare Differentialgleichungen	293
33.3 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	297
34 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	300
34.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	300
34.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	305
35 Einige besondere Typen von Differentialgleichungen	313
35.1 Die homogene Differentialgleichung	313
35.2 Die Euler'sche Differentialgleichung	315
35.3 Die Bernoulli'sche Differentialgleichung	317
35.4 Die Riccati'sche Differentialgleichung	318
35.5 Der Potenzreihenansatz	320
36 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I	324

36.1 Erste Verfahren	324
36.2 Runge-Kuttaverfahren	328
36.3 Mehrschrittverfahren	331
37 Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen	334
37.1 Definitionen und Beispiele	334
37.2 Bild, Kern und die Dimensionsformel	337
37.3 Koordinatenvektoren	338
37.4 Darstellungsmatrizen	340
38 Basistransformation	344
38.1 Die Darstellungsmatrix der Verkettungen linearer Abbildungen	344
38.2 Basistransformation	346
38.3 Die zwei Methoden zur Bestimmung von Darstellungsmatrizen	347
39 Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren	352
39.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	352
39.2 Diagonalisieren von Matrizen	354
39.3 Das charakteristische Polynom einer Matrix	356
39.4 Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen	361
40 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	365
40.1 Gerschgorinkreise	365
40.2 Vektoriteration	367
40.3 Das Jacobiv erfahren	369
40.4 Das $Q\ R$ -Verfahren	373
41 Quadriken	377
41.1 Begriffe und erste Beispiele	377
41.2 Transformation auf Normalform	381
42 Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung	387
42.1 Die Schurzerlegung	387
42.2 Berechnung der Schurzerlegung	389
42.3 Singulärwertzerlegung	392
42.4 Bestimmung der Singulärwertzerlegung	393
43 Die Jordannormalform I	398
43.1 Existenz der Jordannormalform	398
43.2 Verallgemeinerte Eigenräume	401
44 Die Jordannormalform II	407
44.1 Konstruktion einer Jordanbasis	407
44.2 Anzahl und Größe der Jordankästchen	414
45 Definitheit und Matrixnormen	417
45.1 Definitheit von Matrizen	417

45.2 Matrixnormen	421
46 Funktionen mehrerer Veränderlicher	428
46.1 Die Funktionen und ihre Darstellungen	428
46.2 Einige topologische Begriffe	431
46.3 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit	434
47 Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix	438
47.1 Der Gradient	438
47.2 Die Hessematrix	443
47.3 Die Jacobimatrix	445
48 Anwendungen der partiellen Ableitungen	450
48.1 Das (mehrdimensionale) Newtonverfahren	450
48.2 Taylorentwicklung	453
49 Extremwertbestimmung	460
49.1 Lokale und globale Extrema	460
49.2 Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	463
50 Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen	470
50.1 Extrema unter Nebenbedingungen	470
50.2 Das Einsetzverfahren	472
50.3 Die Lagrange'sche Multiplikatorenregel	474
50.4 Extrema unter mehreren Nebenbedingungen	479
51 Totale Differentiation, Differentialoperatoren	482
51.1 Totale Differenzierbarkeit	482
51.2 Das totale Differential	484
51.3 Differentialoperatoren	486
52 Implizite Funktionen	491
52.1 Implizite Funktionen – der einfache Fall	491
52.2 Implizite Funktionen – der allgemeine Fall	495
53 Koordinatentransformationen	500
53.1 Transformationen und Transformationsmatrizen	500
53.2 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	501
53.3 Die Differentialoperatoren in kartesischen Zylinder- und Kugelkoordinaten ..	504
53.4 Umrechnung von Vektorfeldern und Skalarfeldern	507
54 Kurven I	511
54.1 Begriffe	511
54.2 Länge einer Kurve	516
55 Kurven II	519
55.1 Umparametrisierung einer Kurve	519

55.2 Begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion	521
55.3 Die Leibniz'sche Sektorformel	524
56 Kurvenintegrale	527
56.1 Skalare und vektorielle Kurvenintegrale	527
56.2 Anwendungen der Kurvenintegrale	532
57 Gradientenfelder	535
57.1 Definitionen	535
57.2 Existenz einer Stammfunktion	537
57.3 Bestimmung einer Stammfunktion	539
58 Bereichsintegrale	543
58.1 Integration über Rechtecke bzw. Quader	543
58.2 Normalbereiche	546
58.3 Integration über Normalbereiche	547
59 Die Transformationsformel	552
59.1 Integration über Polar-, Zylinder-, Kugel- und weitere Koordinaten	552
59.2 Anwendung: Massen- und Schwerpunktbestimmung	556
60 Flächen und Flächenintegrale	559
60.1 Reguläre Flächen	559
60.2 Flächenintegrale	562
60.3 Übersicht über die behandelten Integrale	564
61 Integralsätze I	567
61.1 Der ebene Satz von Green	567
61.2 Der ebene Satz von Gauß	570
62 Integralsätze II	574
62.1 Der Divergenzsatz von Gauß	574
62.2 Der Satz von Stokes	578
63 Allgemeines zu Differentialgleichungen	583
63.1 Das Richtungsfeld	583
63.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	584
63.3 Transformation auf Systeme 1. Ordnung	586
64 Die exakte Differentialgleichung	589
64.1 Definition exakter DGLen	589
64.2 Das Lösungsverfahren	590
65 Lineare Differentialgleichungssysteme I	595
65.1 Die Exponentialfunktion für Matrizen	595
65.2 Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	598
65.3 Die Lösung für ein diagonalisierbares A	600

66 Lineare Differentialgleichungssysteme II	604
66.1 Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	604
66.2 Die Lösung für ein nichtdiagonalsierbares A	607
67 Lineare Differentialgleichungssysteme III	610
67.1 Lösen von DGL-Systemen	610
67.2 Stabilität	614
68 Randwertprobleme	621
68.1 Typen von Randwertproblemen	621
68.2 Erste Lösungsmethoden	622
68.3 Lineare Randwertprobleme	623
68.4 Die Methode mit der Green'schen Funktion	625
69 Grundbegriffe der Numerik	629
69.1 Kondition	629
69.2 Die Grob-O-Notation	632
69.3 Stabilität	632
70 Fixpunktiteration	635
70.1 Die Fixpunktgleichung	635
70.2 Die Konvergenz von Iterationsverfahren	637
70.3 Implementation	641
70.4 Konvergenzgeschwindigkeit	641
71 Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme	644
71.1 Lösen von Gleichungssystemen durch Fixpunktiteration	644
71.2 Das Jacobiverfahren	646
71.3 Das Gauß-Seidelverfahren	648
71.4 Relaxation	649
72 Optimierung	652
72.1 Das Optimum	652
72.2 Das Gradientenverfahren	653
72.3 Newtonverfahren	654
73 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II	658
73.1 Lösungsverfahren für DGL-Systeme	658
73.2 Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren	660
73.3 Steife Differentialgleichungen	663
74 Fourierreihen – Berechnung der Fourierreihenkoeffizienten	667
74.1 Periodische Funktionen	667
74.2 Die zulässigen Funktionen	669
74.3 Entwicklung in Fourierreihen – reelle Version	671
74.4 Anwendung: Berechnung von Reihenwerten	674

74.5 Entwicklung in Fourierreihen – komplexe Version	675
75 Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung	680
75.1 Das Orthonormalsystem $1/\sqrt{2}, \cos(kx), \sin(kx)$	680
75.2 Sätze und Regeln	682
75.3 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	686
76 Fouriertransformation I	689
76.1 Die Fouriertransformation	689
76.2 Die inverse Fouriertransformation	694
77 Fouriertransformation II	697
77.1 Die Regeln und Sätze zur Fouriertransformation	697
77.2 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	700
78 Diskrete Fouriertransformation	706
78.1 Näherungsweise Bestimmung der Fourierkoeffizienten	706
78.2 Die inverse diskrete Fouriertransformation	710
78.3 Trigonometrische Interpolation	710
79 Die Laplacetransformation	716
79.1 Die Laplacetransformation	716
79.2 Die Rechenregeln bzw. Sätze zur Laplacetransformation	719
79.3 Anwendungen	721
80 Holomorphe Funktionen	731
80.1 Komplexe Funktionen	731
80.2 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie	737
81 Komplexe Integration	741
81.1 Komplexe Kurven	741
81.2 Komplexe Kurvenintegrale	743
81.3 Der Cauchyintegralsatz und die Cauchyintegralformel	746
82 Laurentreihen	752
82.1 Singularitäten	752
82.2 Laurentreihen	753
82.3 Laurentreihenentwicklung	756
83 Der Residuenkalkül	760
83.1 Der Residuensatz	760
83.2 Berechnung reeller Integrale	765
84 Konforme Abbildungen	769
84.1 Allgemeines zu konformen Abbildungen	769
84.2 Möbiustransformationen	771
85 Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem	777

85.1 Harmonische Funktionen	777
85.2 Das Dirichlet'sche Randwertproblem	780
86 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	787
86.1 Lineare pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	788
86.2 Lineare pDGLen 1. Ordnung	791
86.3 Die quasilineare pDGL erster Ordnung	793
87 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines	795
87.1 Erste Begriffe	795
87.2 Die Typeneinteilung	797
87.3 Lösungsmethoden	799
88 Die Laplace- bzw. Poissongleichung	803
88.1 Randwertprobleme für die Poissongleichung	803
88.2 Lösungen der Laplacegleichung	804
88.3 Das Dirichlet'sche Randwertproblem für einen Kreis	806
88.4 Numerische Lösung	807
89 Die Wärmeleitungsgleichung	811
89.1 Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung	811
89.2 Lösungen der Gleichung	812
89.3 Nullrandbedingung: Lösung mit Fourierreihen	814
89.4 Numerische Lösung	816
90 Die Wellengleichung	819
90.1 Anfangs-Randwertprobleme für die Wellengleichung	819
90.2 Lösungen der Gleichung	820
90.3 Die schwingende Saite: Lösung mit Fourierreihen	821
Index	827