

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort .....</b>	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>XIII</b>
<b>Abkürzungen, Variablennamen .....</b>	<b>XIV</b>
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel .....</b>	<b>1</b>
1.1 Mengen und Aussagen .....	1
1.1.1 Mengenbegriff .....	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen .....	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen .....	5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen .....	9
1.1.4.1 Konjunktion .....	9
1.1.4.2 Disjunktion .....	9
1.1.4.3 Negation .....	11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen .....	11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz .....	14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation) .....	14
1.1.5.2 Äquivalenz .....	15
1.1.6 Relationen zwischen Mengen .....	16
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen .....	16
1.1.6.2 Teilmengen .....	16
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen .....	17
1.1.7.1 Durchschnittsmenge .....	17
1.1.7.2 Vereinigungsmenge .....	18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) .....	18
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen .....	21
<b>1.2 Elementare Algebra im Bereich der reellen Zahlen <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>23</b>
Brückenkurs (BK) .....	23
Eingangstest .....	24
Eingangstest - Aufgaben .....	25
BK1 Thema: Axiome (Grundregeln) der Algebra in $\mathbb{R}$ .....	27
BK 1.1 Die neun Axiome (Grundregeln) der Algebra in $\mathbb{R}$ .....	27
BK 1.2 Subtraktion und Division – Differenzen und Brüche .....	32
BK 1.3 Konventionen/Vereinbarungen zur Reihenfolge der Operationen .....	33
Selbstkontroll-Test zu Thema BK1 .....	35
BK2 Thema: Termumformungen in $\mathbb{R}$ – aus den Axiomen abgeleitete Rechenregeln .....	36
BK 2.1 0/1-Regeln und Vorzeichenregeln; Multiplikation von Summen, insb. „Binomische Formeln“ .....	38
BK 2.2 Brüche und algebraische Bruchterme: Multiplikation/Division zweier Brüche, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Addition/Subtraktion zweier Brüche .....	43
BK 2.3 Wann ist ein Produkt/Quotient Null? Konsequenzen für Gleichungen	51
Selbstkontroll-Test zu Thema BK2 .....	53
BK3 Thema: Einige spezielle mathematische Begriffe und Symbole (Exkurs) .....	54
BK 3.1 (absoluter) Betrag einer Zahl/eines Terms .....	54
BK 3.2 Das Summenzeichen .....	55

BK 3.3 Das Produktzeichen .....	60
BK 3.4 Fakultät und Binomialkoeffizient .....	61
Selbstkontroll-Test zu Thema BK3 .....	64
<b>BK4 Thema: Potenzen und Wurzeln .....</b>	<b>65</b>
BK 4.1 Potenzen mit natürlichen und ganzzahligen Exponenten .....	65
BK 4.2 Rechenregeln für Potenzen .....	70
BK 4.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln .....	76
Selbstkontroll-Test zu Thema BK4 .....	83
<b>BK5 Thema: Logarithmen .....</b>	<b>85</b>
BK 5.1 Begriff des Logarithmus .....	85
BK 5.2 Rechenregeln für Logarithmen .....	90
Selbstkontroll-Test zu Thema BK5 .....	94
<b>BK6 Thema: Gleichungen .....</b>	<b>96</b>
BK 6.1 Allgemeines zu Gleichungen und ihren Lösungen .....	96
BK 6.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen .....	99
Exkurs: Beliebte Fehlerfallen bei der Gleichungsumformung .....	107
BK 6.3 Lineare Gleichungen .....	115
BK 6.4 Quadratische Gleichungen .....	117
BK 6.5 Gleichungen höheren als 2. Grades, Substitution, Polynomdivision ..	125
BK 6.6 Bruchgleichungen .....	129
BK 6.7 Wurzelgleichungen und Potenzgleichungen .....	130
BK 6.8 Exponentialgleichungen .....	134
BK 6.9 Logarithmengleichungen .....	137
BK6.10 Exkurs: Lineare Gleichungssysteme .....	138
Selbstkontroll-Test zu Thema BK6 .....	142
<b>BK7 Thema: Ungleichungen .....</b>	<b>144</b>
Rechenregeln für Ungleichungen – Monotoniegesetze .....	144
Lösungsverfahren für Ungleichungen .....	146
Selbstkontroll-Test zu Thema BK7 .....	149
Abschluss-Test .....	150
<b>2 Funktionen einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>153</b>
<b>2.1 Begriff und Darstellung von Funktionen .....</b>	<b>153</b>
2.1.1 Funktionsbegriff .....	153
2.1.2 Graphische Darstellung von Funktionen .....	158
2.1.3 Abschnittsweise definierte Funktionen .....	163
2.1.4 Umkehrfunktionen .....	165
2.1.5 Implizite Funktionen .....	170
2.1.6 Verkettete Funktionen .....	171
<b>2.2 Eigenschaften von Funktionen .....</b>	<b>172</b>
2.2.1 Beschränkte Funktionen .....	172
2.2.2 Monotone Funktionen .....	173
2.2.3 Symmetrische Funktionen .....	175
2.2.4 Nullstellen von Funktionen .....	176
<b>2.3 Elementare Typen von Funktionen .....</b>	<b>176</b>
2.3.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) .....	176
2.3.1.1 Grundbegriffe, Horner-Schema .....	177
2.3.1.2 Konstante und lineare Funktionen .....	178
2.3.1.3 Quadratische Funktionen .....	185
2.3.1.4 Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung .....	187
2.3.2 Gebrochen-rationale Funktionen .....	190
2.3.3 Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) .....	192
2.3.4 Exponentialfunktionen .....	194

2.3.5 Logarithmusfunktionen .....	196
2.3.6 Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen) .....	197
2.4 Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi) .....	203
2.5 Beispiele ökonomischer Funktionen .....	207
<b>3 Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....</b>	<b>229</b>
3.1 Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	229
3.2 Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen .....	230
3.3 Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	239
<b>4 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen .....</b>	<b>243</b>
4.1 Der Grenzwertbegriff .....	243
4.1.1 Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ .....	244
4.1.2 Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ ) .....	248
4.2 Grenzwerte spezieller Funktionen .....	254
4.3 Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen .....	257
4.4 Der Stetigkeitsbegriff .....	261
4.5 Unstetigkeitstypen .....	263
4.6 Stetigkeitsanalyse .....	265
4.7 Stetigkeit ökonomischer Funktionen .....	268
4.8 Asymptoten .....	271
<b>5 Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik .....</b>	<b>275</b>
5.1 Grundlagen der Differentialrechnung .....	275
5.1.1 Problemstellung .....	275
5.1.2 Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung), Differenzenquotient .....	275
5.1.3 Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient) .....	277
5.1.4 Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	281
5.2 Technik des Differenzierens .....	282
5.2.1 Die Ableitung der Grundfunktionen .....	283
5.2.1.1 Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ .....	283
5.2.1.2 Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ .....	283
5.2.1.3 Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ .....	284
5.2.1.4 Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ .....	285
5.2.2 Ableitungsregeln .....	287
5.2.2.1 Faktorregel .....	287
5.2.2.2 Summenregel .....	287
5.2.2.3 Produktregel .....	288
5.2.2.4 Quotientenregel .....	289
5.2.2.5 Kettenregel .....	291
5.2.3 Ergänzungen zur Ableitungstechnik .....	294
5.2.3.1 Ableitung der Umkehrfunktion .....	294
5.2.3.2 Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	296
5.2.3.3 Logarithmische Ableitung .....	298
5.2.4 Höhere Ableitungen .....	299
5.2.5 Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln .....	301
5.3 Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de l'Hôpital .....	302
5.4 Newton-Verfahren zur nähерungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion .....	309
<b>6 Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>313</b>
6.1 Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung .....	313
6.1.1 Das Differential einer Funktion .....	313

6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion . . . . .	316
6.1.2.1	Grenzkosten . . . . .	318
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) . . . . .	319
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag) . . . . .	320
6.1.2.4	Grenzgewinn . . . . .	322
6.1.2.5	Marginale Konsumquote . . . . .	323
6.1.2.6	Marginale Sparquote . . . . .	323
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution . . . . .	324
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion . . . . .	325
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen . . . . .	328
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten . . . . .	329
6.2.2	Extremwerte . . . . .	332
6.2.3	Wendepunkte . . . . .	336
6.2.4	Kurvendiskussion . . . . .	338
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen . . . . .	344
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme . . . . .	346
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen . . . . .	346
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen . . . . .	347
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften . . . . .	350
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen . . . . .	352
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse . . . . .	353
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen . . . . .	356
6.3.2.3	Gewinnmaximierung . . . . .	358
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion . . . . .	365
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung . . . . .	367
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen . . . . .	377
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen . . . . .	377
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen . . . . .	379
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen . . . . .	384
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität . . . . .	390
6.3.4	Überprüfung ökonomischer „Gesetze“ mit Hilfe der Differentialrechnung . . . . .	395
<b>7</b>	<b>Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .</b>	<b>401</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	401
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen . . . . .	401
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen . . . . .	406
7.1.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	407
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen . . . . .	409
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential . . . . .	411
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung . . . . .	413
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen . . . . .	416
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	420
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen . . . . .	420
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	422
7.2.2.1	Problemstellung . . . . .	422
7.2.2.2	Variablensubstitution . . . . .	424
7.2.2.3	Lagrange-Methode . . . . .	424
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	428
7.3.1	Partielle Elastizitäten . . . . .	428
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität . . . . .	428
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation . . . . .	429
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen . . . . .	430

7.3.1.4 Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes .....	433
7.3.2 Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen) .....	438
7.3.2.1 Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion .....	438
7.3.2.2 Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen .....	442
7.3.2.3 Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung .....	447
7.3.2.4 Die Methode der kleinsten Quadrate .....	450
7.3.3 Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen .....	453
7.3.3.1 Minimalkostenkombination .....	453
7.3.3.2 Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion .....	459
7.3.3.3 Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum .....	463
7.3.3.4 Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen .....	469
<b>8 Einführung in die Integralrechnung .....</b>	<b>477</b>
8.1 Das unbestimmte Integral .....	477
8.1.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	477
8.1.2 Grundintegrale .....	480
8.1.3 Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral .....	481
8.2 Das bestimmte Integral .....	483
8.2.1 Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals .....	483
8.2.2 Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals .....	485
8.2.3 Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals .....	486
8.3 Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral .....	488
8.3.1 Integralfunktion .....	488
8.3.2 Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	489
8.3.3 Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	491
8.3.4 Flächeninhaltsberechnung .....	492
8.4 Spezielle Integrationstechniken .....	494
8.4.1 Partielle Integration .....	495
8.4.2 Integration durch Substitution .....	496
8.5 Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung .....	498
8.5.1 Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen .....	498
8.5.2 Die Konsumentenrente .....	501
8.5.3 Die Produzentenrente .....	502
8.5.4 Kontinuierliche Zahlungsströme .....	504
8.5.5 Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft .....	508
8.5.6 Optimale Nutzungsdauer von Investitionen .....	509
8.6 Elementare Differentialgleichungen .....	513
8.6.1 Einleitung .....	513
8.6.2 Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen .....	514
8.6.3 Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen .....	517
8.6.3.1 Exponentielles Wachstum .....	517
8.6.3.2 Funktionen mit vorgegebener Elastizität .....	517
8.6.3.3 Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow .....	519
<b>9 Einführung in die Lineare Algebra .....</b>	<b>525</b>
9.1 Matrizen und Vektoren .....	525
9.1.1 Grundbegriffe der Matrizenrechnung .....	525
9.1.2 Spezielle Matrizen und Vektoren .....	529
9.1.3 Operationen mit Matrizen .....	530
9.1.3.1 Addition von Matrizen .....	530
9.1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor .....	532
9.1.3.3 Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt) .....	534
9.1.3.4 Multiplikation von Matrizen .....	535
9.1.4 Die inverse Matrix .....	542

9.1.5 Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) . . . . .	544
9.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	549
9.2.1 Grundbegriffe . . . . .	549
9.2.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus .	551
9.2.3 Pivotisieren . . . . .	557
9.2.4 Lösbarekeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	562
9.2.5 Berechnung der Inversen einer Matrix . . . . .	567
9.2.6 Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme . . . . .	569
9.2.6.1 Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung . . . . .	569
9.2.6.2 Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . . .	571
<b>10 Lineare Optimierung (LO) . . . . .</b>	<b>575</b>
10.1 Grundlagen und graphische Lösungsmethode . . . . .	575
10.1.1 Ein Problem der Produktionsplanung . . . . .	575
10.1.2 Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems . . . . .	576
10.1.3 Ein Diät-Problem . . . . .	578
10.1.4 Graphische Lösung des Diät-Problems . . . . .	579
10.1.5 Sonderfälle bei graphischer Lösung . . . . .	581
10.1.6 Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung . . . . .	584
10.2 Simplexverfahren . . . . .	586
10.2.1 Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems . . . . .	586
10.2.2 Grundidee des Simplexverfahrens . . . . .	588
10.2.3 Einführung von Schlupfvariablen . . . . .	588
10.2.4 Eckpunkte und Basislösungen . . . . .	589
10.2.5 Optimalitätskriterium . . . . .	591
10.2.6 Engpassbedingung . . . . .	592
10.2.7 Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung . . . . .	594
10.2.8 Beispiel zum Simplex-Verfahren (Standard-Maximum-Problem) . . . . .	595
10.3 Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme . . . . .	597
10.4 Sonderfälle bei LO-Problemen . . . . .	604
10.4.1 Keine zulässige Lösung . . . . .	604
10.4.2 Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) . . . . .	605
10.4.3 Degeneration (Entartung) . . . . .	605
10.4.4 Mehrdeutige optimale Lösungen . . . . .	607
10.4.5 Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen . . . . .	609
10.4.6 Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall . . . . .	610
10.5 Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus . . . . .	611
10.5.1 Produktionsplanungsproblem . . . . .	611
10.5.1.1 Problemformulierung, Einführung von Einheiten . . . . .	611
10.5.1.2 Optimaltableau und optimale Basislösung . . . . .	613
10.5.1.3 Deutung der Zielfunktionskoeffizienten . . . . .	613
10.5.1.4 Deutung der inneren Koeffizienten . . . . .	614
10.5.1.5 Zusammenfassung . . . . .	616
10.5.2 Diätproblem . . . . .	617
10.6 Dualität . . . . .	618
10.6.1 Das duale LO-Problem . . . . .	618
10.6.2 Dualitätssätze . . . . .	621
10.7 Ökonomische Interpretation des Dualproblems . . . . .	624
10.7.1 Dual eines Produktionsplanungsproblems . . . . .	624
10.7.2 Dual eines Diätproblems . . . . .	626
<b>11 Lösungshinweise zum Brückenkurs und zu ausgewählten Aufgaben . . . . .</b>	<b>629</b>
<b>12 Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>667</b>
<b>13 Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>671</b>