

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	XIII
Abkürzungen, Variablennamen	XIV
1 Grundlagen und Hilfsmittel	1
1.1 Mengen und Aussagen	1
1.1.1 Mengenbegriff	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen	5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen	9
1.1.4.1 Konjunktion	9
1.1.4.2 Disjunktion	9
1.1.4.3 Negation	11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen	11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz	14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation)	14
1.1.5.2 Äquivalenz	15
1.1.6 Relationen zwischen Mengen	16
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen	16
1.1.6.2 Teilmengen	16
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen	17
1.1.7.1 Durchschnittsmenge	17
1.1.7.2 Vereinigungsmenge	18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge)	18
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen	21
1.2 Elementare Algebra im Bereich der reellen Zahlen \mathbb{R}	23
Brückenkurs (BK)	23
Eingangstest	24
Eingangstest - Aufgaben	25
BK1 Thema: Axiome (Grundregeln) der Algebra in \mathbb{R}	27
BK 1.1 Die neun Axiome (Grundregeln) der Algebra in \mathbb{R}	27
BK 1.2 Subtraktion und Division – Differenzen und Brüche	32
BK 1.3 Konventionen/Vereinbarungen zur Reihenfolge der Operationen	33
Selbstkontroll-Test zu Thema BK1	35
BK2 Thema: Termumformungen in \mathbb{R} – aus den Axiomen abgeleitete Rechenregeln	36
BK 2.1 0/1-Regeln und Vorzeichenregeln; Multiplikation von Summen, insb. „Binomische Formeln“	38
BK 2.2 Brüche und algebraische Bruchterme: Multiplikation/Division zweier Brüche, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Addition/Subtraktion zweier Brüche	43
BK 2.3 Wann ist ein Produkt/Quotient Null? Konsequenzen für Gleichungen	51
Selbstkontroll-Test zu Thema BK2	53
BK3 Thema: Einige spezielle mathematische Begriffe und Symbole (Exkurs)	54
BK 3.1 (absoluter) Betrag einer Zahl/eines Terms	54
BK 3.2 Das Summenzeichen	55

BK 3.3	Das Produktzeichen	60
BK 3.4	Fakultät und Binomialkoeffizient	61
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK3	64
BK4	Thema: Potenzen und Wurzeln	65
BK 4.1	Potenzen mit natürlichen und ganzzahligen Exponenten	65
BK 4.2	Rechenregeln für Potenzen	70
BK 4.3	Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln	76
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK4	83
BK5	Thema: Logarithmen	85
BK 5.1	Begriff des Logarithmus	85
BK 5.2	Rechenregeln für Logarithmen	90
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK5	94
BK6	Thema: Gleichungen	96
BK 6.1	Allgemeines zu Gleichungen und ihren Lösungen	96
BK 6.2	Äquivalenzumformungen von Gleichungen	99
	Exkurs: Beliebte Fehlerfallen bei der Gleichungsumformung	107
BK 6.3	Lineare Gleichungen	115
BK 6.4	Quadratische Gleichungen	117
BK 6.5	Gleichungen höheren als 2. Grades, Substitution, Polynomdivision	125
BK 6.6	Bruchgleichungen	129
BK 6.7	Wurzelgleichungen und Potenzgleichungen	130
BK 6.8	Exponentialgleichungen	134
BK 6.9	Logarithmengleichungen	137
BK6.10	Exkurs: Lineare Gleichungssysteme	138
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK6	142
BK7	Thema: Ungleichungen	144
	Rechenregeln für Ungleichungen – Monotoniegesetze	144
	Lösungsverfahren für Ungleichungen	146
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK7	149
	Abschluss-Test	150
2	Funktionen einer unabhängigen Variablen	153
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen	153
2.1.1	Funktionsbegriff	153
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen	158
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen	163
2.1.4	Umkehrfunktionen	165
2.1.5	Implizite Funktionen	170
2.1.6	Verkettete Funktionen	171
2.2	Eigenschaften von Funktionen	172
2.2.1	Beschränkte Funktionen	172
2.2.2	Monotone Funktionen	173
2.2.3	Symmetrische Funktionen	175
2.2.4	Nullstellen von Funktionen	176
2.3	Elementare Typen von Funktionen	176
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	176
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema	177
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen	178
2.3.1.3	Quadratische Funktionen	185
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung	187
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen	190
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen)	192
2.3.4	Exponentialfunktionen	194

2.3.5	Logarithmusfunktionen	196
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen)	197
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi)	203
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen	207
3	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	229
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	229
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen	230
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	239
4	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	243
4.1	Der Grenzwertbegriff	243
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$	244
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$)	248
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen	254
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen	257
4.4	Der Stetigkeitsbegriff	261
4.5	Unstetigkeitstypen	263
4.6	Stetigkeitsanalyse	265
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen	268
4.8	Asymptoten	271
5	Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik	275
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung	275
5.1.1	Problemstellung	275
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung), Differenzenquotient	275
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient)	277
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	281
5.2	Technik des Differenzierens	282
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen	283
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$	283
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$	283
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$	284
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$	285
5.2.2	Ableitungsregeln	287
5.2.2.1	Faktorregel	287
5.2.2.2	Summenregel	287
5.2.2.3	Produktregel	288
5.2.2.4	Quotientenregel	289
5.2.2.5	Kettenregel	291
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik	294
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion	294
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen	296
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung	298
5.2.4	Höhere Ableitungen	299
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln	301
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital	302
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion	309
6	Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	313
6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung	313
6.1.1	Das Differential einer Funktion	313

6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion	316
6.1.2.1	Grenzkosten	318
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben)	319
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag)	320
6.1.2.4	Grenzgewinn	322
6.1.2.5	Marginale Konsumquote	323
6.1.2.6	Marginale Sparquote	323
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution	324
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion	325
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen	328
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten	329
6.2.2	Extremwerte	332
6.2.3	Wendepunkte	336
6.2.4	Kurvendiskussion	338
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen	344
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme	346
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen	346
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen	347
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	350
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen	352
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse	353
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen	356
6.3.2.3	Gewinnmaximierung	358
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	365
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	367
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	377
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	377
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	379
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	384
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	390
6.3.4	Überprüfung ökonomischer „Gesetze“ mit Hilfe der Differentialrechnung	395
7	Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	401
7.1	Grundlagen	401
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	401
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	406
7.1.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	407
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	409
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	411
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	413
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	416
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	420
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	420
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	422
7.2.2.1	Problemstellung	422
7.2.2.2	Variablensubstitution	424
7.2.2.3	Lagrange-Methode	424
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	428
7.3.1	Partielle Elastizitäten	428
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität	428
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation	429
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen	430

7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	433
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	438
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	438
7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen	442
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	447
7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	450
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen	453
7.3.3.1	Minimalkostenkombination	453
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion	459
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum	463
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen	469
8	Einführung in die Integralrechnung	477
8.1	Das unbestimmte Integral	477
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	477
8.1.2	Grundintegrale	480
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	481
8.2	Das bestimmte Integral	483
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals	483
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals	485
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals	486
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	488
8.3.1	Integralfunktion	488
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	489
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	491
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung	492
8.4	Spezielle Integrationstechniken	494
8.4.1	Partielle Integration	495
8.4.2	Integration durch Substitution	496
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung	498
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen	498
8.5.2	Die Konsumentenrente	501
8.5.3	Die Produzentenrente	502
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme	504
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft	508
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen	509
8.6	Elementare Differentialgleichungen	513
8.6.1	Einleitung	513
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen	514
8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen	517
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum	517
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität	517
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow	519
9	Einführung in die Lineare Algebra	525
9.1	Matrizen und Vektoren	525
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung	525
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren	529
9.1.3	Operationen mit Matrizen	530
9.1.3.1	Addition von Matrizen	530
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor	532
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	534
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen	535
9.1.4	Die inverse Matrix	542

9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse)	544
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	549
9.2.1	Grundbegriffe	549
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus	551
9.2.3	Pivotisieren	557
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	562
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix	567
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme	569
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung	569
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	571
10	Lineare Optimierung (LO)	575
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode	575
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung	575
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems	576
10.1.3	Ein Diät-Problem	578
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems	579
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung	581
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung	584
10.2	Simplexverfahren	586
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems	586
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens	588
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen	588
10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen	589
10.2.5	Optimalitätskriterium	591
10.2.6	Engpassbedingung	592
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung	594
10.2.8	Beispiel zum Simplex-Verfahren (Standard-Maximum-Problem)	595
10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme	597
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen	604
10.4.1	Keine zulässige Lösung	604
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung)	605
10.4.3	Degeneration (Entartung)	605
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen	607
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen	609
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall	610
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus	611
10.5.1	Produktionsplanungsproblem	611
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten	611
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung	613
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten	613
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten	614
10.5.1.5	Zusammenfassung	616
10.5.2	Diätproblem	617
10.6	Dualität	618
10.6.1	Das duale LO-Problem	618
10.6.2	Dualitätssätze	621
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems	624
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems	624
10.7.2	Dual eines Diätproblems	626
11	Lösungshinweise zum Brückenkurs und zu ausgewählten Aufgaben	629
12	Literaturverzeichnis	667
13	Sachwortverzeichnis	671