

# Inhalt

## Prolog

<b>Die Entstehung der Algebra</b> .....	<b>1</b>
Das Erbe der Griechen .....	1
Die Renaissance in Italien .....	2
Auf dem Weg zur modernen Algebra .....	2
<b>Symmetrien</b> .....	<b>3</b>
Transformationen .....	3
Affine und euklidische Räume .....	3
Die Bewegungsgruppe in der euklidischen Ebene .....	5
Symmetrie von Objekten .....	6

## Teil I Gruppen

<b>1 Gruppen</b> .....	<b>9</b>
1.1 Grundlegende Begriffe .....	9
1.2 Untergruppen und Homomorphismen .....	15
1.3 Direkte Produkte und Summen .....	17
1.4 Aktionen .....	19
1.5 Normalteiler und Faktorgruppen .....	25
1.6 Zyklische Gruppen .....	28
1.7 Anhang: Der euklidische Algorithmus .....	30
Übungsaufgaben .....	31
<b>2 Die Sätze von Sylow</b> .....	<b>35</b>
2.1 Die Klassengleichung .....	35
2.2 Exponenten .....	36
2.3 $p$ -Sylow-Untergruppen .....	36
Übungsaufgaben .....	39
<b>3 Der Satz von Jordan-Hölder</b> .....	<b>40</b>
3.1 Auflösbare und einfache Gruppen .....	40
3.2 Verfeinerung von Normalreihen .....	42
Übungsaufgaben .....	45

<b>4 Symmetrie</b>	<b>46</b>
4.1 Permutationsgruppen	46
4.2 Beispiele	49
4.2.1 Die Gruppe $\mathcal{S}_3$	49
4.2.2 Die Gruppe $\mathcal{A}_4$	49
4.2.3 Die Gruppe $\mathcal{S}_4$	50
4.2.4 Die Gruppe $\mathcal{A}_5$	50
Übungsaufgaben	51
<b>5 Platonische Körper</b>	<b>53</b>
5.1 Polytope und Polyeder	53
5.2 Das Tetraeder	56
5.3 Der Würfel und das Oktaeder	57
5.4 Das Dodekaeder und das Ikosaeder	57
<b>6 Universelle Konstruktionen</b>	<b>59</b>
6.1 Produkte und Koprodukte von Mengen	59
6.2 Produkte und Koprodukte von Gruppen	60
6.3 Semidirekte Produkte	62
6.4 Freie Gruppen	66
6.5 Beispiele	68
Übungsaufgaben	71
<b>7 Endlich erzeugte abelsche Gruppen</b>	<b>72</b>
7.1 Freie abelsche Gruppen	72
7.2 Torsion in Gruppen	74
7.3 Struktur endlicher abelscher Gruppen	76
Übungsaufgaben	79

## Teil II

### Ringtheorie

<b>8 Ringe</b>	<b>80</b>
8.1 Grundlagen	80
8.2 Unterringe und Homomorphismen	82
8.3 Produkte von Ringen	84
8.4 Ideale und Faktorenringe	85
8.5 Ideale in kommutativen Ringen	87
8.6 Der chinesische Restsatz	90
Übungsaufgaben	93

9 Lokalisierung.....96

9.1 Lokalisierung von Ringen ..... 96

9.2 Ideale und Lokalisierung ..... 98

Übungsaufgaben ..... 99

10 Hauptidealringe und faktorielle Ringe.....100

10.1 Faktorielle Ringe ..... 100

10.2 Euklidische Ringe.....103

Übungsaufgaben ..... 103

11 Quadratische Zahlringe ..... 104

11.1 Zahlringe ..... 104

11.2 Einheiten ..... 105

11.3 Die pellsche Gleichung ..... 107

11.4 Primelemente im gaussischen Zahlring ..... 110

Übungsaufgaben ..... 111

12 Polynomringe.....112

12.1 Polynome .....112

12.2 Polynome in mehreren Variablen ..... 113

12.3 Auswerten von Polynomen ..... 115

12.4 Potenzreihen ..... 116

12.5 Derivationen ..... 116

12.6 Symmetrische Funktionen ..... 118

12.7 Resultante und Diskriminante ..... 122

12.8 Eindeutige Primfaktorzerlegung ..... 125

12.9 Irreduzibilität ..... 127

Übungsaufgaben ..... 129

Teil III

Abriss der Körpertheorie

13 Grundlagen der Körpertheorie ..... 132

13.1 Körper und Primkörper ..... 132

13.2 Körpererweiterungen ..... 133

13.3 Algebraische Körpererweiterungen ..... 135

13.4 Algebraisch abgeschlossene Erweiterungen ..... 137

13.5 Konjugierte Erweiterungen ..... 138

Übungsaufgaben ..... 141

<b>14 Theorie der Körpererweiterungen</b>	<b>142</b>
14.1 Separabilität	142
14.2 Inseparabilität	148
14.3 Normale Erweiterungen	149
Übungsaufgaben	151

## Teil IV Galois-Theorie

<b>15 Die Galois-Korrespondenz</b>	<b>153</b>
15.1 Galois-Erweiterungen	153
15.2 Hauptsatz der Galois-Theorie	155
15.3 Ein Beispiel	159
15.4 Anwendungen der Galois-Theorie	160
Übungsaufgaben	162
<b>16 Kreisteilungskörper</b>	<b>164</b>
16.1 Einheitswurzeln	164
16.2 Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms	168
Übungsaufgaben	171
<b>17 Das quadratische Reziprozitätsgesetz</b>	<b>172</b>
17.1 Quadratische Erweiterungen	172
17.2 Gaußsche Summen	174
17.3 Das quadratische Reziprozitätsgesetz	175
Übungsaufgaben	177
<b>18 Auflösung durch Radikale</b>	<b>178</b>
18.1 Der Satz von Speiser	178
18.2 Kummer-Theorie	180
18.3 Artin-Schreier-Theorie	183
18.4 Zyklische Erweiterungen	184
18.5 Der Hauptsatz	185
18.6 Kubische Gleichungen	187
<b>19 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal</b>	<b>189</b>

**Teil V**  
**Darstellungen von endlichen Gruppen**

**20 Grundlagen ..... 192**

    20.1 Darstellungen ..... 192

    20.2 Grundlegende Beispiele ..... 193

    20.3 Projektoren ..... 197

    20.4 Irreduzible Darstellungen ..... 199

    20.5 Die induzierte Darstellung ..... 203

    20.6 Adjungierte Funktoren ..... 206

    Übungsaufgaben ..... 208

**21 Charaktere ..... 210**

    21.1 Der Charakter einer Darstellung ..... 210

    21.2 Orthogonalitätsrelationen ..... 212

    21.3 Zerlegung der regulären Darstellung ..... 215

    21.4 Anzahl der irreduziblen Darstellungen ..... 216

    21.5 Beispiele ..... 218

        21.5.1 Die Gruppe  $\mathcal{S}_2$  ..... 218

        21.5.2 Zyklische Gruppen ..... 218

        21.5.3 Die Gruppe  $\mathcal{S}_3$  ..... 218

        21.5.4 Die Gruppe  $\mathcal{A}_4$  ..... 219

        21.5.5 Die Gruppe  $\mathcal{S}_4$  ..... 220

    Übungsaufgaben ..... 221

**Teil VI**  
**Moduln und Algebren**

**22 Moduln und Algebren ..... 222**

    22.1 Grundlegende Begriffe ..... 222

    22.2 Homomorphismen und freie Moduln ..... 224

    22.3 Vollständig reduzible Moduln ..... 226

    22.4 Der Satz von Wedderburn ..... 229

    22.5 Quaternionenalgebren ..... 231

    Übungsaufgaben ..... 234

**23 Tensorprodukte ..... 235**

    23.1 Tensorprodukt von Moduln ..... 235

    23.2 Assoziativität des Tensorprodukts ..... 237

    23.3 Homomorphismen und direkte Summen ..... 238

    23.4 Tensorprodukt von Algebren ..... 240

23.5 Die Tensoralgebra ..... 241

23.6 Die symmetrische Algebra ..... 243

23.7 Die Clifford-Algebra ..... 244

  

**Literaturverzeichnis ..... 245**

  

**Liste der Symbole ..... 247**

  

**Index ..... 249**