

Inhalt

Prolog

Die Entstehung der Algebra	1
Das Erbe der Griechen	1
Die Renaissance in Italien	2
Auf dem Weg zur modernen Algebra	2

Symmetrien	3
Transformationen	3
Affine und euklidische Räume	3
Die Bewegungsgruppe in der euklidischen Ebene	5
Symmetrie von Objekten	6

Teil I Gruppen

1 Gruppen	9
1.1 Grundlegende Begriffe	9
1.2 Untergruppen und Homomorphismen	15
1.3 Direkte Produkte und Summen	17
1.4 Aktionen	19
1.5 Normalteiler und Faktorgruppen	25
1.6 Zyklische Gruppen	28
1.7 Anhang: Der euklidische Algorithmus	30
Übungsaufgaben	31
2 Die Sätze von Sylow	35
2.1 Die Klassengleichung	35
2.2 Exponenten	36
2.3 p -Sylow-Untergruppen	36
Übungsaufgaben	39
3 Der Satz von Jordan-Hölder	40
3.1 Auflösbare und einfache Gruppen	40
3.2 Verfeinerung von Normalreihen	42
Übungsaufgaben	45

4 Symmetrie	46
4.1 Permutationsgruppen	46
4.2 Beispiele	49
4.2.1 Die Gruppe S_3	49
4.2.2 Die Gruppe A_4	49
4.2.3 Die Gruppe S_4	50
4.2.4 Die Gruppe A_5	50
Übungsaufgaben	51
5 Platonische Körper	53
5.1 Polytope und Polyeder	53
5.2 Das Tetraeder	56
5.3 Der Würfel und das Oktaeder	57
5.4 Das Dodekaeder und das Ikosaeder	57
6 Universelle Konstruktionen	59
6.1 Produkte und Koprodukte von Mengen	59
6.2 Produkte und Koprodukte von Gruppen	60
6.3 Semidirekte Produkte	62
6.4 Freie Gruppen	66
6.5 Beispiele	68
Übungsaufgaben	71
7 Endlich erzeugte abelsche Gruppen	72
7.1 Freie abelsche Gruppen	72
7.2 Torsion in Gruppen	74
7.3 Struktur endlicher abelscher Gruppen	76
Übungsaufgaben	79
Teil II	
Ringtheorie	
8 Ringe	80
8.1 Grundlagen	80
8.2 Unterringe und Homomorphismen	82
8.3 Produkte von Ringen	84
8.4 Ideale und Faktorenringe	85
8.5 Ideale in kommutativen Ringen	87
8.6 Der chinesische Restsatz	90
Übungsaufgaben	93

9 Lokalisierung	96
9.1 Lokalisierung von Ringen	96
9.2 Ideale und Lokalisierung	98
Übungsaufgaben	99
10 Hauptidealringe und faktorielle Ringe	100
10.1 Faktorielle Ringe	100
10.2 Euklidische Ringe	103
Übungsaufgaben	103
11 Quadratische Zahlringe	104
11.1 Zahlringe	104
11.2 Einheiten	105
11.3 Die pellsche Gleichung	107
11.4 Primelemente im gaußschen Zahlring	110
Übungsaufgaben	111
12 Polynomringe	112
12.1 Polynome	112
12.2 Polynome in mehreren Variablen	113
12.3 Auswerten von Polynomen	115
12.4 Potenzreihen	116
12.5 Derivationen	116
12.6 Symmetrische Funktionen	118
12.7 Resultante und Diskriminante	122
12.8 Eindeutige Primfaktorzerlegung	125
12.9 Irreduzibilität	127
Übungsaufgaben	129
Teil III	
Abriss der Körpertheorie	
13 Grundlagen der Körpertheorie	132
13.1 Körper und Primkörper	132
13.2 Körpererweiterungen	133
13.3 Algebraische Körpererweiterungen	135
13.4 Algebraisch abgeschlossene Erweiterungen	137
13.5 Konjugierte Erweiterungen	138
Übungsaufgaben	141

14 Theorie der Körpererweiterungen	142
14.1 Separabilität	142
14.2 Inseparabilität	148
14.3 Normale Erweiterungen	149
Übungsaufgaben	151
Teil IV	
Galois-Theorie	
15 Die Galois-Korrespondenz	153
15.1 Galois-Erweiterungen	153
15.2 Hauptsatz der Galois-Theorie	155
15.3 Ein Beispiel	159
15.4 Anwendungen der Galois-Theorie	160
Übungsaufgaben	162
16 Kreisteilungskörper	164
16.1 Einheitswurzeln	164
16.2 Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms	168
Übungsaufgaben	171
17 Das quadratische Reziprozitätsgesetz	172
17.1 Quadratische Erweiterungen	172
17.2 Gaußsche Summen	174
17.3 Das quadratische Reziprozitätsgesetz	175
Übungsaufgaben	177
18 Auflösung durch Radikale	178
18.1 Der Satz von Speiser	178
18.2 Kummer-Theorie	180
18.3 Artin-Schreier-Theorie	183
18.4 Zyklische Erweiterungen	184
18.5 Der Hauptsatz	185
18.6 Kubische Gleichungen	187
19 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	189

Teil V Darstellungen von endlichen Gruppen

20 Grundlagen	192
20.1 Darstellungen	192
20.2 Grundlegende Beispiele	193
20.3 Projektoren	197
20.4 Irreduzible Darstellungen	199
20.5 Die induzierte Darstellung	203
20.6 Adjungierte Funktoren	206
Übungsaufgaben	208
21 Charaktere	210
21.1 Der Charakter einer Darstellung	210
21.2 Orthogonalitätsrelationen	212
21.3 Zerlegung der regulären Darstellung	215
21.4 Anzahl der irreduziblen Darstellungen	216
21.5 Beispiele	218
21.5.1 Die Gruppe S_2	218
21.5.2 Zyklische Gruppen	218
21.5.3 Die Gruppe S_3	218
21.5.4 Die Gruppe A_4	219
21.5.5 Die Gruppe S_4	220
Übungsaufgaben	221

Teil VI Moduln und Algebren

22 Moduln und Algebren	222
22.1 Grundlegende Begriffe	222
22.2 Homomorphismen und freie Moduln	224
22.3 Vollständig reduzible Moduln	226
22.4 Der Satz von Wedderburn	229
22.5 Quaternionenalgebren	231
Übungsaufgaben	234
23 Tensorprodukte	235
23.1 Tensorprodukt von Moduln	235
23.2 Assoziativität des Tensorprodukts	237
23.3 Homomorphismen und direkte Summen	238
23.4 Tensorprodukt von Algebren	240

23.5 Die Tensoralgebra	241
23.6 Die symmetrische Algebra	243
23.7 Die Clifford-Algebra	244
Literaturverzeichnis	245
Liste der Symbole	247
Index	249