

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorbündel: Grundlagen	1
1.1	Grundlegende Definitionen	2
1.1.1	Vektorbündel	2
1.1.2	Vektorbündel-Homomorphismen	10
1.1.3	Unterbündel	14
1.1.4	Schnitte	15
1.1.5	Isomorphieklassen von \mathbb{K} -Vektorbündeln über B	18
1.2	Liften und Whitney-Summe	19
1.2.1	Zurückziehen von Vektorbündeln	19
1.2.2	Whitney-Summe	23
1.2.3	Stabile Isomorphie	26
1.3	Vektorbündel-Homomorphismen	27
1.3.1	Bijektive Vektorbündel-Homomorphismen	27
1.3.2	Strikte Vektorbündel-Homomorphismen	29
1.3.3	Kern-, Bild- und Quotientenbündel	31
1.3.4	Projektorenfamilien	33
1.4	Operationen	34
1.4.1	Algebraische Operationen für Vektorbündel	34
1.4.2	Reelle und komplexe Linienbündel	42
1.5	Ergänzungen	45
1.5.1	Projektive Räume	45
1.5.2	Die Spezialfälle $P_1(\mathbb{K}) \cong S^d$	45
1.5.3	Tangentialbündel projektiver Räume	46
1.5.4	Homotopiegruppen	48
2	Umgang mit Vektorbündeln	51
2.1	Schnitte	52
2.1.1	Schnitte und Vektorbündel-Homomorphismen	52
2.1.2	Beispiele	54
2.1.3	Erweiterung und Existenz von Schnitten	56
2.1.4	Der Homotopiesatz	59
2.2	Riemannsche und Hermitesche Metriken	62
2.2.1	Konstruktion und Eigenschaften	62
2.2.2	Orthogonale Komplemente	66
2.2.3	Einbettungen und stabile Inverse	69

2.3	Vektorbündel-Probleme	74
2.4	Klassifikation und Konstruktion von Vektorbündeln durch lokale Daten	83
2.4.1	Übergangsfunktionen	84
2.4.2	Klassifikation mittels Übergangsfunktionen	86
2.4.3	Konstruktionen mittels Übergangsfunktionen	90
2.5	Kleben, Kollabieren	93
2.5.1	Klebekonstruktionen	93
2.5.2	Kollabieren von Bündeln über Unterräumen	98
2.6	Exakte Sequenzen	103
2.6.1	Die lange exakte Sequenz eines Raumpaares	104
2.6.2	Die Puppe-Sequenz	108
2.6.3	Gruppenstruktur	112
2.6.4	Kooperation	114
2.7	Prinzipalbündel und Faserbündel	119
2.7.1	G-Prinzipalbündel	119
2.7.2	Vektorbündel und Prinzipalbündel	122
2.7.3	Zur Klassifikation von Prinzipalbündeln	126
2.8	Zusätzliche Strukturen	129
2.8.1	Orientierbare Vektorbündel	129
2.8.2	G-Vektorbündel, eine kurze Einführung	132
2.9	Ergänzungen	135
2.9.1	Parakompakte Räume und Zerlegungen der Eins	135
2.9.2	Einhängungen und Schleifenräume	136
2.9.3	Der polnische Kreis	139
2.9.4	Exakte Homotopiesequenzen, Faserungen und Kofaserungen	140
3	Klassifikation von Vektorbündeln	151
3.1	Vektorbündel über einer Einhängung	152
3.1.1	Komplexe Bündel über SX	153
3.1.2	Reelle Bündel über ΣX	159
3.1.3	Orientierte Vektorbündel	161
3.1.4	Stabile Vektorbündel über SX	166
3.2	Die Stabilisierungssequenz I	169
3.2.1	Die Herleitung der Stabilisierungssequenz	170
3.2.2	Erste Beispiele zur Stabilisierungssequenz	175
3.2.3	Stabilitätssätze	177
3.2.4	Fasersequenzen	181
3.2.5	Die komplexe Stabilisierungssequenz	184
3.3	Vektorbündel über Sphären	187
3.3.1	Das Tangentialbündel der Sphäre in der Stabilisierungssequenz	188
3.3.2	Einschub: Das Vektorfeld-Problem auf S^{4m+1}	193
3.3.3	Stabile Bündel und Bott-Periodizität	196
3.3.4	Die ersten instabilen Homotopiegruppen von $SO(n)$	198
3.3.5	Bündel unendlicher Ordnung	201

3.3.6 Komplexe Bündel	203
3.4 Die Klassifikationssätze	208
3.4.1 Graßmann-Mannigfaltigkeiten und universelle Bündel	208
3.4.2 Klassifizierende Abbildungen	212
3.4.3 Die Klassifikationssätze für reelle und komplexe Bündel	216
3.4.4 Klassifikation stabiler Vektorbündel	220
3.4.5 Vektorbündel über einer Einhängung II	224
3.5 Das Arbeiten mit den Klassifikationssätzen	227
3.5.1 Basispunkte und exakte Sequenzen	228
3.5.2 Intervall mit doppeltem Nullpunkt	235
3.5.3 Nicht-Kommutativität in $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$	238
3.6 Ergänzungen	242
3.6.1 Schwache Topologie	242
3.6.2 Basispunkte	244
3.6.3 Lie-Gruppen	245
3.6.4 Homotopiemengen und CW- Komplexe	246
3.6.5 Ausschneidung für relative Homotopiegruppen	248
3.6.6 Thom-Räume	250
3.6.7 Anheftende Abbildungen in projektiven Räumen und Berechnung von $[P_n(\mathbb{R}), S^n]_0$	251
4 Charakteristische Klassen für Vektorbündel	255
4.1 Kohomologie	256
4.1.1 Eilenberg-MacLane Räume	256
4.1.2 Linienbündel	258
4.2 Charakteristische Klassen	260
4.2.1 Die Euler-Klasse	260
4.2.2 Stiefel-Whitney und Chern-Klassen	262
4.3 Vektorbündel über CW-Komplexen kleiner Dimension	267
4.4 K-Theorie und Bott-Periodizität	269
4.4.1 Definition der K-Gruppen	269
4.4.2 Das reduzierte Produkt in $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$	272
4.4.3 Die Bott-Periodizitäts Abbildungen	273
4.4.4 Die Gruppen $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(\Sigma^i P_2(\mathbb{C}))$	276
4.4.5 Die Bott-Sequenz	278
4.5 Bott-Periodizität und charakteristische Klassen	280
4.5.1 Spaltungsprinzip und Newton-Polynome	280
4.5.2 Stiefel-Whitney-Klassen für Bündel über Sphären	283
4.6 Vektorbündel und Kohomologie	285
4.6.1 Adams-Filtrierung	285
4.6.2 Bündel über X	286
4.6.3 Bündel über einer Einhängung	288
4.7 Zum Beweis des Periodizitätssatzes	292
4.7.1 Der Morse-Theorie-Beweis	294

4.7.2 Der Homologie-Beweis	296
4.7.3 Der elementare Beweis	300
5 Stabile und nicht stabile Vektorbündel	307
5.1 Die Stabilisierungssequenz II	308
5.1.1 Herleitung der Stabilisierungssequenz	308
5.1.2 Schnitte in Vielfachen von Bündeln	315
5.2 Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz	318
5.2.1 Hurewicz-Abbildung und der Satz von Hopf	318
5.2.2 Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz	319
5.2.3 Die Euler-Klasse eines n -dimensionalen Bündels über einem n -dimensionalen Komplex	325
5.3 Stabil triviale Vektorbündel	326
5.3.1 Gauß-Abbildungen I	327
5.3.2 Klassifikation stabil trivialer Vektorbündel: der einfachste Fall	328
5.3.3 Beispiele	332
5.3.4 n -dimensionale Bündel über einem n -dimensionalen Komplex	334
5.4 Niedrigdimensionale Beispiele	338
5.4.1 Vektorbündel über $P_2(\mathbb{R})$	338
5.4.2 Ebenenbündel über $P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$	343
5.5 Stabile Bündel über projektiven Räumen	344
6 Vektorbündel und stabile Homotopie	351
6.1 Stabile Homotopie	353
6.1.1 Einhängungssätze	353
6.1.2 Stabile Abbildungen	357
6.1.3 S-Dualität	361
6.1.4 Der Chern-Charakter	365
6.2 Die allgemeine Stabilisierungssequenz	371
6.2.1 Stiefel-Mannigfaltigkeiten	372
6.2.2 Herleitung der allgemeinen Stabilisierungssequenz	373
6.2.3 Gauß-Abbildungen II	374
6.2.4 Schnitte in $\gamma_{k,n}$ und in stabil trivialen Vektorbündeln	377
6.2.5 Stabilitätseigenschaften	379
6.3 Vektorbündel bis auf Faserhomotopieäquivalenz	383
6.3.1 Die Gruppe $J(X)$	383
6.3.2 Orientierbarkeit in stabiler Homotopie	385
6.3.3 Funktionenräume	389
6.3.4 J -Homomorphismus I	391
6.4 Sphärische Faserungen	398
6.4.1 Klassifizierende Räume für sphärische Faserungen, ein Überblick	398
6.4.2 Bündelreduktion und sphärische Faserungen	400
6.4.3 Reduktion auf stabile Abbildungen	407

7 Adams-Vermutung und Berechnung von $J(X)$	409
7.1 Adams-Operationen	409
7.1.1 Adams-Operationen	409
7.1.2 K-Theorie Hindernisse für Faserhomotopietrivialität	413
7.1.3 Berechnung von $J(P_n(\mathbb{R}))$	418
7.2 Adams-Vermutung	422
7.2.1 Die Adams-Vermutung und der Kograd von Vektorbündeln	423
7.2.2 Die klassifizierende Raum Version der Adams-Vermutung	428
7.2.3 $\text{Bild}(J)$ -Theorie und e -Invariante, ein Ausblick	431
7.3 Anwendungen der Adams-Vermutung	435
7.3.1 Der Vektorfeldsatz	435
7.3.2 Fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten	438
7.3.3 Periodizitätsoperatoren	439
7.3.4 Aushängen von $\text{Bild}(J)$ -Klassen	441
7.4 Ergänzungen	448
7.4.1 Die stabile Einhängungsordnung von $P_{2n}(\mathbb{R})$	448
7.4.2 Periodizitätsoperatoren auf Quotienten projektiver Räume	452
8 J-Homomorphismus und EHP-Sequenz	457
8.1 Der klassische J -Homomorphismus	458
8.1.1 Der Verbund zweier Räume und die Hopf-Konstruktion	458
8.1.2 Der J -Homomorphismus II	462
8.1.3 Der Thom-Raum für Bündel über einer Einhängung	464
8.2 EHP-Sequenz, Hopf-Invariante und Whitehead-Produkt	466
8.2.1 Die klassische EHP-Sequenz	466
8.2.2 Die EHP-Faserung	468
8.2.3 Aufspaltungen und James-Modell	471
8.2.4 Das Whitehead-Produkt und die Abbildung P	477
8.2.5 Hopf-Invarianten	482
8.2.6 Distributivgesetze	487
8.3 EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz	490
8.3.1 Klassische EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz	490
8.3.2 Die Hopf-Invariante einer Hopf-Konstruktion	493
8.3.3 EHP-Faserung und Stabilisierungssequenz	498
8.4 Die iterierte Einhängungssequenz von James	500
8.4.1 Die iterierte Einhängungssequenz und das Aushängungsproblem	500
8.4.2 Anwendungen	505
8.5 Ergänzungen	507
8.5.1 Ergänzungen zum Verbund, zur Hopf-Konstruktion und zum J -Homomorphismus	507
8.5.2 Der Thom-Raum des Tangentialbündels der Sphäre	514

9 Vektorbündel im metastabilen Bereich	517
9.1 Metastabile Homotopiegruppen von $SO(n)$	518
9.1.1 Der Satz von Barratt-Mahowald	518
9.1.2 Die Homotopie-Euler-Klasse eines Barratt-Mahowald-Bündels und das Samelson Produkt $\langle c_{\tau S^{2k}}, c_{\tau S^{2k}} \rangle$	524
9.2 Schnitthindernisse und stabil triviale Bündel	530
9.2.1 Stabil triviale Bündel	530
9.2.2 Die Hindernisabbildung p_*	531
9.3 James-Periodizität	533
9.4 Vektorfelder auf Sphären und stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten	538
9.4.1 Vektorfelder auf Sphären	540
9.4.2 Das Vektorfeld-Problem für π -Mannigfaltigkeiten	545
9.4.3 Die Stabilisierungssequenz für stabil triviale Bündel	549
9.4.4 Die Homotopie-Euler-Klasse einer Vektorfeld-Bündelreduktion von τS^{n-1}	555
9.5 Gauß-Abbildungen in K-Theorie	559
9.5.1 Adams-Filtrierung-0- und bo -primäre Bündel	560
9.5.2 Die Ordnung der Bündelreduktion $(\tau S^n)^{(-k)}$	570
9.5.3 Der Vektorfeldsatz nach Toda	574
9.5.4 Anwendungen	576
Literaturverzeichnis	580
Index	588