
Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Logik und Mengen | 1 |
| 1.1 | Elementare Logik | 1 |
| 1.2 | Elementare Mengenlehre | 10 |
| 1.3 | Schaltalgebra | 16 |
| 1.3.1 | Anwendung: Entwurf von Schaltkreisen | 22 |
| 1.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 24 |
| 1.5 | Kontrollfragen | 25 |
| 1.6 | Übungen | 30 |
| 2 | Zahlenmengen und Zahlensysteme | 35 |
| 2.1 | Die Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} | 35 |
| 2.2 | Summen und Produkte | 46 |
| 2.3 | Vollständige Induktion | 48 |
| 2.4 | Stellenwertsysteme | 50 |
| 2.5 | Maschinenzahlen | 53 |
| 2.6 | Teilbarkeit und Primzahlen | 57 |
| 2.7 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 60 |
| 2.8 | Kontrollfragen | 63 |
| 2.9 | Übungen | 67 |

Diskrete Mathematik

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Elementare Begriffe der Zahlentheorie | 75 |
| 3.1 | Das kleine Einmaleins auf endlichen Mengen | 75 |
| 3.1.1 | Anwendung: Hashfunktionen | 79 |
| 3.2 | Gruppen, Ringe und Körper | 81 |
| 3.2.1 | Anwendung: Welche Fehler erkennen Prüfwerte? | 92 |
| 3.3 | Der Euklid'sche Algorithmus und diophantische Gleichungen | 94 |
| 3.3.1 | Anwendung: Der RSA-Verschlüsselungsalgorithmus | 99 |
| 3.4 | Der Chinesische Restsatz | 104 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.1 | Anwendung: Rechnen mit großen Zahlen | 106 |
| 3.4.2 | Anwendung: Verteilte Geheimnisse | 107 |
| 3.5 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 109 |
| 3.6 | Kontrollfragen | 111 |
| 3.7 | Übungen | 114 |
| 4 | Polynomringe und endliche Körper | 117 |
| 4.1 | Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$ | 117 |
| 4.2 | Der Restklassenring $\mathbb{K}[x]_{m(x)}$ | 123 |
| 4.2.1 | Anwendung: Zyklische Codes | 128 |
| 4.3 | Endliche Körper | 129 |
| 4.3.1 | Anwendung: Der Advanced Encryption Standard | 132 |
| 4.3.2 | Anwendung: Reed-Solomon-Codes | 133 |
| 4.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 133 |
| 4.5 | Kontrollfragen | 135 |
| 4.6 | Übungen | 138 |
| 5 | Relationen und Funktionen | 143 |
| 5.1 | Relationen | 143 |
| 5.1.1 | Anwendung: Relationales Datenmodell | 151 |
| 5.2 | Funktionen | 155 |
| 5.3 | Kontrollfragen | 168 |
| 5.4 | Übungen | 172 |
| 6 | Folgen und Reihen | 177 |
| 6.1 | Folgen | 177 |
| 6.1.1 | Anwendung: Wurzelziehen à la Heron | 187 |
| 6.2 | Reihen | 188 |
| 6.3 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 195 |
| 6.4 | Kontrollfragen | 197 |
| 6.5 | Übungen | 199 |
| 7 | Kombinatorik | 203 |
| 7.1 | Grundlegende Abzählverfahren | 203 |
| 7.2 | Permutationen und Kombinationen | 207 |
| 7.3 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 214 |
| 7.4 | Kontrollfragen | 214 |
| 7.5 | Übungen | 215 |
| 8 | Rekursionen und Wachstum von Algorithmen | 221 |
| 8.1 | Grundbegriffe | 221 |
| 8.1.1 | Ausblick: Iterationsverfahren und Chaos | 225 |
| 8.2 | Lineare Rekursionen | 228 |
| 8.2.1 | Anwendung: Sparkassenformel | 237 |
| 8.3 | Wachstum von Algorithmen | 238 |
| 8.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 245 |
| 8.5 | Kontrollfragen | 247 |
| 8.6 | Übungen | 250 |

Lineare Algebra

| | | |
|-----------|---|------------|
| 9 | Vektorräume | 253 |
| 9.1 | Vektoren | 253 |
| 9.2 | Lineare Unabhängigkeit und Basis | 261 |
| 9.3 | Teilräume | 266 |
| 9.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 271 |
| 9.5 | Kontrollfragen | 272 |
| 9.6 | Übungen | 274 |
| 10 | Matrizen und Lineare Abbildungen | 279 |
| 10.1 | Matrizen | 279 |
| 10.2 | Multiplikation von Matrizen | 284 |
| 10.3 | Lineare Abbildungen | 291 |
| 10.3.1 | Anwendung: Lineare Codes | 299 |
| 10.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 302 |
| 10.5 | Kontrollfragen | 304 |
| 10.6 | Übungen | 307 |
| 11 | Lineare Gleichungen | 313 |
| 11.1 | Der Gauß-Jordan-Algorithmus | 313 |
| 11.1.1 | Anwendung: Elektrische Netzwerke | 321 |
| 11.1.2 | Anwendung: Input-Output-Analyse nach Leontjef | 323 |
| 11.2 | Rang, Kern, Bild | 324 |
| 11.3 | Determinante | 329 |
| 11.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 334 |
| 11.5 | Kontrollfragen | 335 |
| 11.6 | Übungen | 337 |
| 12 | Lineare Optimierung | 341 |
| 12.1 | Lineare Ungleichungen | 341 |
| 12.2 | Lineare Optimierung | 344 |
| 12.3 | Der Simplex-Algorithmus | 345 |
| 12.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 351 |
| 12.5 | Kontrollfragen | 353 |
| 12.6 | Übungen | 354 |
| 13 | Skalarprodukt und Orthogonalität | 359 |
| 13.1 | Skalarprodukt und orthogonale Projektion | 359 |
| 13.1.1 | Anwendung: Matched-Filter | 369 |
| 13.1.2 | Anwendung: Lineare Klassifikation | 370 |
| 13.1.3 | Anwendung: Ray-Tracing | 370 |
| 13.2 | Orthogonalentwicklungen | 372 |
| 13.3 | Orthogonale Transformationen | 378 |
| 13.3.1 | Anwendung: QR-Zerlegung | 382 |
| 13.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 383 |
| 13.5 | Kontrollfragen | 384 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 13.6 | Übungen | 386 |
| 14 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 389 |
| 14.1 | Koordinatentransformationen | 389 |
| 14.2 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 392 |
| 14.2.1 | Anwendung: Bewertung von Webseiten mit <i>PageRank</i> | 401 |
| 14.3 | Eigenwerte symmetrischer Matrizen | 404 |
| 14.3.1 | Anwendung: Die diskrete Kosinustransformation | 407 |
| 14.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 410 |
| 14.5 | Kontrollfragen | 410 |
| 14.6 | Übungen | 412 |
| <hr/> | | |
| | Graphentheorie | |
| <hr/> | | |
| 15 | Grundlagen der Graphentheorie | 415 |
| 15.1 | Grundbegriffe | 415 |
| 15.2 | Darstellung von Graphen am Computer | 421 |
| 15.3 | Wege und Kreise | 424 |
| 15.4 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 431 |
| 15.5 | Kontrollfragen | 433 |
| 15.6 | Übungen | 436 |
| 16 | Bäume und kürzeste Wege | 443 |
| 16.1 | Bäume | 443 |
| 16.2 | Das Problem des Handlungsreisenden | 449 |
| 16.2.1 | Ausblick: Die Komplexitätsklassen P und NP | 451 |
| 16.3 | Minimale aufspannende Bäume | 451 |
| 16.4 | Kürzeste Wege | 454 |
| 16.4.1 | Anwendung: Routing im Internet | 457 |
| 16.5 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 458 |
| 16.6 | Kontrollfragen | 460 |
| 16.7 | Übungen | 463 |
| 17 | Flüsse in Netzwerken und Matchings | 469 |
| 17.1 | Netzwerke | 469 |
| 17.2 | Matchings | 477 |
| 17.3 | Mit dem digitalen Rechenmeister | 483 |
| 17.4 | Kontrollfragen | 484 |
| 17.5 | Übungen | 487 |

Anhang

| | | |
|----------|---|-----|
| A | Einführung in Mathematica | 493 |
| A.1 | Erste Schritte | 493 |
| A.2 | Funktionen | 495 |
| A.3 | Gleichungen | 497 |
| A.4 | Programme | 499 |
| B | Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben | 501 |
| B.1 | Logik und Mengen | 501 |
| B.2 | Zahlenmengen und Zahlensysteme | 501 |
| B.3 | Elementare Begriffe der Zahlentheorie | 502 |
| B.4 | Polynomringe und endliche Körper | 502 |
| B.5 | Relationen und Funktionen | 503 |
| B.6 | Folgen und Reihen | 503 |
| B.7 | Kombinatorik | 503 |
| B.8 | Rekursionen und Wachstum von Algorithmen | 504 |
| B.9 | Vektorräume | 504 |
| B.10 | Matrizen und Lineare Abbildungen | 505 |
| B.11 | Lineare Gleichungen | 505 |
| B.12 | Lineare Optimierung | 505 |
| B.13 | Skalarprodukt und Orthogonalität | 506 |
| B.14 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 506 |
| B.15 | Grundlagen der Graphentheorie | 506 |
| B.16 | Bäume und kürzeste Wege | 507 |
| B.17 | Flüsse in Netzwerken und Matchings | 507 |
| | Literatur | 509 |
| | Verzeichnis der Symbole | 512 |
| | Index | 515 |