
Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

1	Logik und Mengen	1
1.1	Elementare Logik	1
1.2	Elementare Mengenlehre	10
1.3	Schaltalgebra	16
1.3.1	Anwendung: Entwurf von Schaltkreisen	22
1.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	24
1.5	Kontrollfragen	25
1.6	Übungen	30
2	Zahlenmengen und Zahlensysteme	35
2.1	Die Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C}	35
2.2	Summen und Produkte	46
2.3	Vollständige Induktion	48
2.4	Stellenwertsysteme	50
2.5	Maschinenzahlen	53
2.6	Teilbarkeit und Primzahlen	57
2.7	Mit dem digitalen Rechenmeister	60
2.8	Kontrollfragen	63
2.9	Übungen	67

Diskrete Mathematik

3	Elementare Begriffe der Zahlentheorie	75
3.1	Das kleine Einmaleins auf endlichen Mengen	75
3.1.1	Anwendung: Hashfunktionen	79
3.2	Gruppen, Ringe und Körper	81
3.2.1	Anwendung: Welche Fehler erkennen Prüfziffern?	92
3.3	Der Euklid'sche Algorithmus und diophantische Gleichungen	94
3.3.1	Anwendung: Der RSA-Verschlüsselungsalgorithmus	99
3.4	Der Chinesische Restsatz	104

X Inhaltsverzeichnis

3.4.1	Anwendung: Rechnen mit großen Zahlen	106
3.4.2	Anwendung: Verteilte Geheimnisse	107
3.5	Mit dem digitalen Rechenmeister	109
3.6	Kontrollfragen	111
3.7	Übungen	114
4	Polynomringe und endliche Körper	117
4.1	Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$	117
4.2	Der Restklassenring $\mathbb{K}[x]_{m(x)}$	123
4.2.1	Anwendung: Zyklische Codes	128
4.3	Endliche Körper	129
4.3.1	Anwendung: Der Advanced Encryption Standard	132
4.3.2	Anwendung: Reed-Solomon-Codes	133
4.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	133
4.5	Kontrollfragen	135
4.6	Übungen	138
5	Relationen und Funktionen	143
5.1	Relationen	143
5.1.1	Anwendung: Relationales Datenmodell	151
5.2	Funktionen	155
5.3	Kontrollfragen	168
5.4	Übungen	172
6	Folgen und Reihen	177
6.1	Folgen	177
6.1.1	Anwendung: Wurzelziehen à la Heron	187
6.2	Reihen	188
6.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	195
6.4	Kontrollfragen	197
6.5	Übungen	199
7	Kombinatorik	203
7.1	Grundlegende Abzählverfahren	203
7.2	Permutationen und Kombinationen	207
7.3	Mit dem digitalen Rechenmeister	214
7.4	Kontrollfragen	214
7.5	Übungen	215
8	Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	221
8.1	Grundbegriffe	221
8.1.1	Ausblick: Iterationsverfahren und Chaos	225
8.2	Lineare Rekursionen	228
8.2.1	Anwendung: Sparkassenformel	237
8.3	Wachstum von Algorithmen	238
8.4	Mit dem digitalen Rechenmeister	245
8.5	Kontrollfragen	247
8.6	Übungen	250

Lineare Algebra

9 Vektorräume	253
9.1 Vektoren	253
9.2 Lineare Unabhängigkeit und Basis	261
9.3 Teilräume	266
9.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	271
9.5 Kontrollfragen	272
9.6 Übungen	274
10 Matrizen und Lineare Abbildungen	279
10.1 Matrizen	279
10.2 Multiplikation von Matrizen	284
10.3 Lineare Abbildungen	291
10.3.1 Anwendung: Lineare Codes	299
10.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	302
10.5 Kontrollfragen	304
10.6 Übungen	307
11 Lineare Gleichungen	313
11.1 Der Gauß-Jordan-Algorithmus	313
11.1.1 Anwendung: Elektrische Netzwerke	321
11.1.2 Anwendung: Input-Output-Analyse nach Leontief	323
11.2 Rang, Kern, Bild	324
11.3 Determinante	329
11.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	334
11.5 Kontrollfragen	335
11.6 Übungen	337
12 Lineare Optimierung	341
12.1 Lineare Ungleichungen	341
12.2 Lineare Optimierung	344
12.3 Der Simplex-Algorithmus	345
12.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	351
12.5 Kontrollfragen	353
12.6 Übungen	354
13 Skalarprodukt und Orthogonalität	359
13.1 Skalarprodukt und orthogonale Projektion	359
13.1.1 Anwendung: Matched-Filter	369
13.1.2 Anwendung: Lineare Klassifikation	370
13.1.3 Anwendung: Ray-Tracing	370
13.2 Orthogonalentwicklungen	372
13.3 Orthogonale Transformationen	378
13.3.1 Anwendung: QR-Zerlegung	382
13.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	383
13.5 Kontrollfragen	384

XII Inhaltsverzeichnis

13.6 Übungen	386
14 Eigenwerte und Eigenvektoren	389
14.1 Koordinatentransformationen	389
14.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	392
14.2.1 Anwendung: Bewertung von Webseiten mit <i>PageRank</i>	401
14.3 Eigenwerte symmetrischer Matrizen	404
14.3.1 Anwendung: Die diskrete Kosinustransformation	407
14.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	410
14.5 Kontrollfragen	410
14.6 Übungen	412

Graphentheorie

15 Grundlagen der Graphentheorie	415
15.1 Grundbegriffe	415
15.2 Darstellung von Graphen am Computer	421
15.3 Wege und Kreise	424
15.4 Mit dem digitalen Rechenmeister	431
15.5 Kontrollfragen	433
15.6 Übungen	436
16 Bäume und kürzeste Wege	443
16.1 Bäume	443
16.2 Das Problem des Handlungsreisenden	449
16.2.1 Ausblick: Die Komplexitätsklassen P und NP	451
16.3 Minimale aufspannende Bäume	451
16.4 Kürzeste Wege	454
16.4.1 Anwendung: Routing im Internet	457
16.5 Mit dem digitalen Rechenmeister	458
16.6 Kontrollfragen	460
16.7 Übungen	463
17 Flüsse in Netzwerken und Matchings	469
17.1 Netzwerke	469
17.2 Matchings	477
17.3 Mit dem digitalen Rechenmeister	483
17.4 Kontrollfragen	484
17.5 Übungen	487

Anhang

A Einführung in Mathematica	493
A.1 Erste Schritte	493
A.2 Funktionen	495
A.3 Gleichungen	497
A.4 Programme	499
B Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben	501
B.1 Logik und Mengen	501
B.2 Zahlenmengen und Zahlensysteme	501
B.3 Elementare Begriffe der Zahlentheorie	502
B.4 Polynomringe und endliche Körper	502
B.5 Relationen und Funktionen	503
B.6 Folgen und Reihen	503
B.7 Kombinatorik	503
B.8 Rekursionen und Wachstum von Algorithmen	504
B.9 Vektorräume	504
B.10 Matrizen und Lineare Abbildungen	505
B.11 Lineare Gleichungen	505
B.12 Lineare Optimierung	505
B.13 Skalarprodukt und Orthogonalität	506
B.14 Eigenwerte und Eigenvektoren	506
B.15 Grundlagen der Graphentheorie	506
B.16 Bäume und kürzeste Wege	507
B.17 Flüsse in Netzwerken und Matchings	507
Literatur	509
Verzeichnis der Symbole	512
Index	515