

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zur Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Aus der Mengenlehre . . . . .	2
1.2	Der $n$ -dimensionale Raum . . . . .	6
1.3	Vektoraddition; skalares Vielfaches eines Vektors . . . . .	8
1.4	Geraden . . . . .	9
1.5	Die Geradengleichung in der Ebene . . . . .	11
1.6	Das innere Produkt in der Ebene . . . . .	15
1.7	Abstand Punkt – Gerade . . . . .	19
1.8	Das innere Produkt im Raum . . . . .	21
1.9	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
1.10	Das äußere Produkt im Raum . . . . .	27
1.11	Ebenen im Raum; Abstand Punkt – Ebene . . . . .	31
1.12	Abbildungen . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Gruppen, Körper, lineare Räume</b>	<b>45</b>
2.1	Gruppen . . . . .	46
2.2	Körper . . . . .	52
2.3	Lineare Räume oder Vektorräume . . . . .	61
2.4	Das Erzeugnis . . . . .	66
2.5	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit . . . . .	68
2.6	Basen in endlichdimensionalen Räumen . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>79</b>
3.1	Definition und Beispiele . . . . .	80
3.2	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	82
3.3	Zusammensetzung linearer Abbildungen . . . . .	87
3.4	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren . . . . .	96
3.5	Invertierung linearer Abbildungen . . . . .	119
3.6	Weiteres zum Eliminationsverfahren . . . . .	123
3.7	Anwendung: Zur Wärmeleitungsgleichung . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Geometrie linearer Abbildungen</b>	<b>135</b>
4.1	Der Nullraum oder Kern . . . . .	136
4.2	Das Bild . . . . .	137
4.3	Basiswechsel . . . . .	138
4.4	Der Rang einer linearen Abbildung . . . . .	141
4.5	Direkte Summen; Quotientenräume . . . . .	147

---

<b>5 Lineare Abbildungen – Determinanten</b>	159
5.1 Determinanten kleiner Matrizen . . . . .	160
5.2 Permutationen . . . . .	164
5.3 Determinanten – Vorbereitung . . . . .	168
5.4 Grundeigenschaften von Determinanten . . . . .	171
5.5 Algorithmisches . . . . .	176
<b>6 Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	185
6.1 Von den Polynomen . . . . .	186
6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren: Grundeigenschaften . . . . .	192
6.3 Das charakteristische Polynom . . . . .	194
6.4 Eigenräume . . . . .	198
<b>7 Innere Produkte und Normen</b>	203
7.1 Inneres Produkt – reeller Fall . . . . .	204
7.2 Inneres Produkt – komplexer Fall . . . . .	208
7.3 Normierte Räume . . . . .	210
7.4 Orthogonalisierung von Vektoren . . . . .	213
7.5 Orthogonale Basen und andere . . . . .	218
7.6 Adjunktion, Transposition und Hermite'sche Konjugation . . . . .	221
7.7 Beste Approximation durch Teilräume . . . . .	227
7.8 Ausgleichsprobleme . . . . .	230
<b>8 Adjungierte Transformation und selbstadjungierte Abbildungen</b>	237
8.1 Die adjungierte Transformation . . . . .	238
8.2 Normale Abbildungen . . . . .	240
8.3 Selbstadjungierte Abbildungen . . . . .	245
8.4 Orthogonale und unitäre Abbildungen . . . . .	249
8.5 Bilinearformen und Sesquilinearformen . . . . .	256
8.6 Synopsis: Gruppen linearer Abbildungen . . . . .	263
8.7 Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung . . . . .	267
8.8 Komplexe Exponentialfunktion und Fourierreihen . . . . .	272
8.9 Die diskrete Fouriertransformation . . . . .	277
8.10 Anwendungen der Fouriertransformation . . . . .	284
<b>9 Normalformen von Matrizen</b>	291
9.1 Die Jordan'sche Normalform . . . . .	292
9.2 Anwendung: Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	299
9.3 Die Singulärwertzerlegung . . . . .	306
<b>10 Lineare Algebra und partielle Differentialgleichungen</b>	321
10.1 Methode der Finiten Elemente . . . . .	322
10.2 Die Wärmeleitungsgleichung: Symmetrie und Variationsprinzip . . . . .	324
10.3 Die Ritz-Galerkin'sche Methode . . . . .	332
10.4 Implementierung des Ritz-Galerkin'schen Verfahrens . . . . .	334
10.5 Die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse . . . . .	337

---

<b>11 Numerische Lineare Algebra</b>	347
11.1 Householder-Matrizen und die $QR$ -Zerlegung	349
11.2 Normen: Querverbindungen zur Analysis	356
11.3 Matrixnormen	361
11.4 Kondition von Gleichungssystemen	366
11.5 Iterative Lösung von Gleichungen: Das Prinzip	368
11.6 Die Verfahren von Jacobi und Gauß-Seidel	375
11.7 Das Mehrgitterverfahren	379
11.8 Das Verfahren der konjugierten Gradienten	383
11.9 Eigenwerte: Die Potenzmethode	393
11.10 Hessenbergmatrizen	396
11.11 Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen	399
<b>12 Lineare Optimierung</b>	403
12.1 Die Problemstellung	404
12.2 Konvexe Polyeder	411
12.3 Die Simplexmethode	421
<b>Index</b>	427