Inhalt

Vorwort 7

Zum Lehramtsstudium 13

Die Themen des Buches 16

Erster Abschnitt: Reelle und komplexe Zahlen 19

1.1 Warum die rationalen Zahlen nicht genügen 21

Die Entdeckung der alten Griechen 21
Der Satz von Gauß 23
Algebraische Zahlen 25
Weitere Beweise der Irrationalität von $\sqrt{2}$ 26
Ausblick: $\sqrt{2}$ hoch $\sqrt{2}$ 27

1.2 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 29

Das Hilbertsche Hotel 29
Abzählbare Mengen 30
Das Diagonalverfahren 32
Ausblick: Elementare Mächtigkeitstheorie 35

1.3 Algebraische Eigenschaften von $\mathbb{R}$ 39

Die Körperaxiome 39
Subtraktion und Division 40
„Minus mal Minus gleich Plus" und die Sonderrolle der Null ... 41
Summen und Produkte 42
Ausblick: Endliche Körper 43

1.4 Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ 45

Die Ordnungsaxiome 45
Verbindung zwischen Arithmetik und Ordnung 47
Supremum und Infimum 49
Das Vollständigkeitsaxiom 51
Die Axiome für die reellen Zahlen 55
Ausblick: Konstruktion und Charakterisierung von $\mathbb{R}$ 56

1.5 Die komplexen Zahlen 61

Eine Multiplikation für die Ebene 61
Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ 62
Die imaginäre Einheit 64
Real- und Imaginärteil 65
Der Betrag einer komplexen Zahl 66
Komplexe Quadratwurzeln 67
Ausblick: Quaternionen und Oktaven 68

1.6 Algebraische Gleichungen 71

Das Abspalten von Nullstellen 71
Lösen quadratischer Gleichungen 73
Bestimmung der dritten Einheitswurzeln 75
Zum Fundamentalsatz der Algebra 76
Ausblick: Lösungsformeln für Gleichungen höheren Grades . . . 79

Zweiter Abschnitt: Folgen und Reihen 83

2.1 Konvergente Folgen 85

Folgen 85
Der Grenzwertbegriff 88
Die allgemeine Grenzwertdefinition 92
Die Eindeutigkeit des Grenzwerts 97
Die Limesregeln 99
Wurzeln und rationale Exponenten 101
Teilfolgen und Häufungspunkte 103
Der Satz von Bolzano-Weierstraß 105
Häufungspunkte für Mengen 107
Die Sprechweisen „unendlich oft" und „schließlich" 108
Konvergenz in $\mathbb{C}$ 109
Die Unendlichkeitssymbole 110
Ausblick: Kettenbrüche 112

2.2 Cauchy-Folgen 117

Der Konvergenzsatz 118
Limes Inferior und Superior 119
Ausblick: Varianten der Axiomatisierung der reellen Zahlen . . . 122

2.3 Unendliche Reihen 125

Partialsummen und Reihen 125
Limesregeln für Reihen 128
Elementare Bestimmung von unendlichen Summen 129
Die geometrischen Reihen 131
Die harmonische Reihe 133
Unendliche Produkte 136
Ausblick: Cesàro-Summen 137

2.4 Konvergenzkriterien für Reihen 141

Alternierende Reihen 142
Absolute und bedingte Konvergenz 143
Das Majorantenkriterium 144
Geometrische Reihen als Majoranten 145
Abelsche Summation 148
Reihen komplexer Zahlen 150
Ausblick: Das Baseler Problem und die Zeta-Funktion 151

2.5 Umordnungen und Produkte 155

Unendliche Umordnungen 155
Produkte von Reihen 159
Cauchy- und Rechteck-Produkt 161
Ausblick: Allgemeine Doppelsummen 163

2.6 Die Exponentialreihe 167

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl 168
Das Additionstheorem 169
Die komplexe Exponentialfunktion 171
Ausblick: Die binomischen Reihen 172

Dritter Abschnitt: Stetige Funktionen 177

3.1 Die Limesstetigkeit 179

Der anschauliche Stetigkeitsbegriff 179
Die Limesstetigkeit 180
Die Stetigkeit der Exponentialfunktion 185
Der Identitätssatz für stetige Funktionen 186
Stetige Fortsetzungen 187
Grenzwerte für Funktionen 189
Klassifikation der Unstetigkeit 192
Die Stetigkeit in ℂ 192
Ausblick: Limes Superior und Inferior für Funktionen 193

3.2 Die Umgebungsstetigkeit 197

Die Epsilon-Delta-Bedingung 197
Der Äquivalenzsatz 198
Die Stetigkeit der Umkehrfunktion 199
Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit 201
Die Umgebungsstetigkeit in ℂ 203
Ausblick: Feinanalyse der gleichmäßigen Stetigkeit 204

3.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen 207

Kompakte Intervalle 207
Der Zwischenwertsatz von Bolzano-Cauchy 207
Der Extremwertsatz von Weierstraß 210

Der Satz von Heine über gleichmäßige Stetigkeit 212
Ausblick: Folgenkompakte Mengen reeller Zahlen 213

3.4 Die reelle Exponentialfunktion 215

Der natürliche Logarithmus 216
Die Limesdarstellung der Exponentialfunktion 218
Die allgemeine Exponentialfunktion 220
Der Logarithmus zu einer positiven Basis 222
Potenzfunktionen mit reellem Exponenten 223
Ausblick: Funktionalgleichungen 225

3.5 Die komplexe Exponentialfunktion 229

Die Kreisaufwicklung 229
Sinus und Kosinus 232
Bilder der komplexen Exponentialfunktion 238
Polarkoordinaten und Argument 239
Einheitswurzeln und Berechnung des Kreisumfangs 240
Tangens und Kotangens 243
Die Arkusfunktionen 245
Sekans und Kosekans 247
Ausblick: Die Hyperbelfunktionen 249

3.6 Konvergente Funktionenfolgen 253

Punktweise Konvergenz 253
Gleichmäßige Konvergenz 255
Die Supremumsnorm 256
Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz 258
Gleichmäßige Approximation durch Polynome 260
Funktionenfolgen in $\mathbb{C}$ 265
Ausblick: Der Satz von Dini 266

Vierter Abschnitt: Differentiation 269

4.1 Differentialquotienten 271

Die Ableitung einer Funktion 272
Lineare Approximation 275
Differenzierbarkeit in allen Punkten 277
Grundlegende Ableitungen 278
Ausblick: Stetige nirgends differenzierbare Funktionen 283

4.2 Ableitungsregeln 287

Die Linearität 287
Die Produktregel 288
Die Kettenregel 289
Die Quotientenregel 291
Die Ableitung der Umkehrfunktion 292

Die logarithmische Ableitung 294
Ableitung der elementaren Funktionen 295
Mehrfache Differenzierbarkeit 296
Ausblick: Komplexe Differentiation 299

4.3 Der Mittelwertsatz 303

Kritische Punkte und der Satz von Darboux 303
Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz 306
Lokale Extrema und Monotonieverhalten 308
Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema 311
Die Lösungen der Differentialgleichung $f' = f$ 314
Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen 316
Die Regeln von l'Hospital 317
Ausblick: Irreguläre lokale Extremwerte 321

4.4 Die Krümmung 323

Konvexe und konkave Funktionen 323
Kriterien der Konvexität 324
Analytische Bestimmung der Krümmung 327
Wendepunkte 328
Krümmungskreise 330
Schmiegeparabeln 333
Das Newton-Verfahren 335
Kurvendiskussion 339
Ausblick: Die λ-Formulierung der Konvexität 340

4.5 Die Taylor-Entwicklung 343

Die Taylor-Polynome 344
Der allgemeine Approximationssatz 346
Visualisierungen von Taylor-Polynomen 346
Der Satz von Taylor 350
Taylor-Reihen 354
Konvergenzergebnisse 358
Ausblick: Die Polynom-Interpolation 360

4.6 Potenzreihen 367

Potenzreihen und ihre Konvergenzbereiche 367
Konvergenzradien 369
Gliedweises Differenzieren 372
Die Logarithmus- und Arkustangensreihe 374
Der Abelsche Grenzwertsatz 378
Potenzreihen in $\mathbb{C}$ 381
Ausblick: Der Satz von Peano-Borel 383

Ergänzungen **387**

E1 Irrationale Verhältnisse in geometrischen Figuren 388
E2 Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, I 391
E3 Die geometrische Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$ 395
E4 Aneignung des Grenzwertbegriffs 398
E5 Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, II 400
E6 Untersuchung spezieller Reihen 403
E7 Visualisierungen stetiger Funktionen, I 404
E8 Visualisierungen stetiger Funktionen, II 406
E9 Die elementaren Funktionen in Natur und Geometrie 408
E10 Zur Bedeutung der Ableitung 410
E11 Zum Krümmungsbegriff und Newton-Verfahren 412
E12 Taylor-Entwicklungen 414

Übungen **417**

Anhänge **467**

A1 Voraussetzungen und Notationen 469

A2 Bezüge zur Schulmathematik 473

Rationale Zahlen 473
Funktionsbegriff 473
Reelle Zahlen 474
Die trigonometrischen Funktionen 475
Die Kreiszahl π 475
Exponentialfunktionen und Logarithmen 475
Grenzwertbegriff und Limesnotation 476
Stetigkeit 477
Differentialquotienten und Ableitungsregeln 477
Anwendungen der Differentiation 478
Die Eulersche Zahl e 478

A3 Literatur 479

A4 Notationen 483

A5 Index 486