

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
Einleitung	XV
1 Der Garten der natürlichen Zahlen	1
1.1 Figurierte Zahlen	1
1.2 Summen von Quadratzahlen, Dreieckszahlen und dritten Potenzen	7
1.3 Es gibt unendlich viele Primzahlen	11
1.4 Fibonacci-Zahlen	14
1.5 Der Satz von Fermat	17
1.6 Der Satz von Wilson	18
1.7 Vollkommene Zahlen	19
1.8 Aufgaben	20
2 Besondere Zahlen	23
2.1 Die Irrationalität von $\sqrt{2}$	24
2.2 Die Irrationalität von \sqrt{k} für nicht-quadratische k	25
2.3 Der Goldene Schnitt	26
2.4 π und der Kreis	30
2.5 Die Irrationalität von π	31
2.6 Comte de Buffon und seine Nadel	33
2.7 e als Grenzwert	35
2.8 Eine unendliche Reihe für e	37
2.9 Die Irrationalität von e	38
2.10 Steiners Aufgabe zur Euler'schen Zahl e	38
2.11 Die Euler-Mascheroni-Zahl	39
2.12 Rationale und irrationale Exponenten	41
2.13 Aufgaben	42

3	Punkte in der Ebene	47
3.1	Der Satz von Pick	47
3.2	Kreise und Summen von zwei Quadratzahlen	50
3.3	Der Satz von Sylvester und Gallai	51
3.4	Exakte Aufteilung von 100.000 Punkten	53
3.5	Tauben und Taubenschläge	54
3.6	Zuordnung von Zahlen zu Punkten in der Ebene	56
3.7	Aufgaben	58
4	Spielwiese der Vielecke	61
4.1	Kombinatorik von Vielecken	61
4.2	Konstruktion eines n -Ecks mit vorgegebenen Seitenlängen	65
4.3	Die Sätze von Maekawa und Kawasaki	66
4.4	Die Quadratur von Vielecken	68
4.5	Die Sterne auf dem polygonalen Spielplatz	70
4.6	Museumswächter	73
4.7	Triangulation konvexer Vielecke	75
4.8	Zykloiden, Zyklogone und polygonale Zykloiden	78
4.9	Aufgaben	82
5	Eine Schatzkiste voller Dreieckssätze	85
5.1	Der Satz des Pythagoras	85
5.2	Pythagoreische Verwandte	87
5.3	Der Inkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks	89
5.4	Die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras durch Pappus	91
5.5	Der Inkreis und die Formel von Heron	93
5.6	Der Umkreis und Eulers Dreiecksungleichung	94
5.7	Das Höhenfußdreieck	96
5.8	Die Ungleichung von Erdős und Mordell	97
5.9	Der Satz von Steiner und Lehmus	99
5.10	Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck	101
5.11	Sind die meisten Dreiecke stumpfwinklig?	103
5.12	Aufgaben	104
6	Der Zauber des gleichseitigen Dreiecks	107
6.1	Sätze von der Art des Pythagoras	107
6.2	Der Fermat'sche Punkt eines Dreiecks	110
6.3	Der Satz von Viviani	112
6.4	Eine Dreiecksparkettierung der Ebene und die Ungleichung von Weitzenböck	112
6.5	Der Satz von Napoleon	115
6.6	„Morleys Wunder“	116

6.7	Der Satz von van Schooten	118
6.8	Das gleichseitige Dreieck und der Goldene Schnitt	120
6.9	Aufgaben	120
7	Das Reich der Vierecke	125
7.1	Mittelpunkte in Vierecken	125
7.2	Sehnenvierecke	128
7.3	Gleichungen und Ungleichungen zu Vierecken	130
7.4	Tangentenviereck und bizenrische Vierecke	133
7.5	Die Sätze von Anne und Newton	135
7.6	Der Satz des Pythagoras mit einem Parallelogramm und gleichseitigen Dreiecken	137
7.7	Aufgaben	138
8	Überall Quadrate	141
8.1	Ein-Quadrat-Sätze	141
8.2	Zwei-Quadrate-Sätze	143
8.3	Drei-Quadrate-Sätze	149
8.4	Vier und mehr Quadrate	152
8.5	Quadrate in der Unterhaltungsmathematik	154
8.6	Aufgaben	156
9	Aufregende Kurven	159
9.1	Quadraturen von Sichelformen	159
9.2	Die verblüffende archimedische Spirale	166
9.3	Die Quadratrix des Hippias	169
9.4	Das Schustermesser und das Salzfüßchen	170
9.5	Kegelschnitte à la Quetelet und Dandelin	172
9.6	Archimedische Dreiecke	174
9.7	Helices	177
9.8	Aufgaben	179
10	Abenteuer mit Parkettierungen und Färbungen	183
10.1	Ebene Parkettierungen und Mosaik	184
10.2	Parkettierungen mit Dreiecken und Vierecken	189
10.3	Unendlich viele Beweise für den Satz des Pythagoras	192
10.4	Der springende Frosch	195
10.5	Die sieben Friese	197
10.6	Farbenfrohe Beweise	201
10.7	Dodekaeder und Hamilton-Kreise	211
10.8	Aufgaben	213

11	Geometrie in drei Dimensionen	217
11.1	Der Satz des Pythagoras in drei Dimensionen	218
11.2	Die Unterteilung des Raums mit Ebenen	220
11.3	Zwei Dreiecke auf drei Geraden	222
11.4	Ein Kegel zur Winkeldreiteilung	222
11.5	Die Schnittpunkte von drei Kugeln	223
11.6	Der vierte Kreis	225
11.7	Die Fläche eines sphärischen Dreiecks	226
11.8	Die Euler'sche Polyederformel	227
11.9	Flächen und Vertices in Eulers Formel	229
11.10	Weshalb sich manche Arten von Flächen in Polyedern wiederholen	232
11.11	Euler und Descartes à la Pólya	233
11.12	Die Quadratur von Quadraten und die „Würfelung“ von Würfeln	234
11.13	Aufgaben	235
12	Weitere Sätze, Aufgaben und Beweise	237
12.1	Abzählbare und überabzählbare Mengen	237
12.2	Der Satz von Cantor, Schröder und Bernstein	239
12.3	Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung	241
12.4	Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel	242
12.5	Zwei Origamiperlen	244
12.6	Wie zeichnet man eine Gerade?	247
12.7	Einige Schmuckstücke an Funktionalgleichungen	249
12.8	Funktionalungleichungen	257
12.9	Die Euler-Reihe für $\pi^2/6$	261
12.10	Das Wallis-Produkt	264
12.11	Die Stirling'sche Näherung für $n!$	265
12.12	Aufgaben	268
	Lösungen zu den Aufgaben	271
	Literaturverzeichnis	309
	Sachverzeichnis	319