

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	15
1.1	Aussagen	15
1.2	Mengen	18
1.3	Abbildungen und Verknüpfungen	21
1.4	Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen.....	22
1.4.1	Eigenschaften der reellen Zahlen	22
1.4.2	Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.....	25
1.5	Summen, Produkte und vollständige Induktion	25
1.6	Aufgaben.....	29
2	Komplexe Zahlen und algebraische Gleichungen.....	30
2.1	Komplexe Zahlen	31
2.1.1	Einführung	31
2.1.2	Grundbegriffe	33
2.1.3	Rechenoperationen	34
2.1.4	Exponentialdarstellung von komplexen Zahlen	36
2.1.5	Anwendungen.....	41
2.2	Algebraische Gleichungen	45
2.3	Aufgaben.....	50
3	Vektorrechnung	51
3.1	Einführung und Grundbegriffe	51
3.2	Rechnen mit Vektoren	54
3.2.1	Addition von Vektoren und Multiplikation mit einer Zahl	54
3.2.2	Skalarprodukt und Betrag von Vektoren	55
3.2.3	Winkel zwischen Vektoren, Zerlegung von Vektoren.....	57
3.2.4	Basisvektoren.....	60
3.2.5	Das Vektorprodukt	61
3.2.6	Das Spatprodukt und Mehrfachprodukte	63
3.3	Vektorrechnung und Geometrie	65

3.3.1	Punkte im Raum.....	65
3.3.2	Geraden im Raum	65
3.3.3	Ebenen im Raum	66
3.3.4	Abstände	66
3.3.5	Winkel.....	69
3.4	Aufgaben	71
4	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	73
4.1	Matrizen und Determinanten.....	74
4.1.1	Grundbegriffe und spezielle Matrizen.....	74
4.1.2	Addition und Multiplikation von Matrizen	77
4.1.2.1	Addition von Matrizen und Multiplikation mit einer Zahl.....	77
4.1.2.2	Multiplikation von Matrizen und inverse Matrix	78
4.1.3	Determinante einer Matrix	81
4.1.4	Inversion einer Matrix mit Determinanten.....	86
4.2	Lineare Gleichungssysteme	88
4.2.1	Lösung mit dem Gaußschen Algorithmus	89
4.2.2	Lösung mit Determinanten: Cramersche Regel.....	96
4.2.3	Inversion von Matrizen als Lösung von Gleichungssystemen	97
4.2.4	Kondition eines Gleichungssystems.....	100
4.3	Aufgaben	102
5	Funktionen von einer Variablen	105
5.1	Grundlagen.....	106
5.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	116
5.2.1	Folgen.....	116
5.2.2	Grenzwert einer Funktion.....	118
5.2.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	118
5.2.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$ und Asymptoten	121
5.2.3	Stetigkeit einer Funktion.....	122
5.3	Elementare Funktionen	123
5.3.1	Polynomfunktion	123
5.3.2	Gebrochenrationale Funktionen	125
5.3.3	Die Exponentialfunktion	127
5.3.3.1	Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion	128
5.3.3.2	Anwendungsbeispiele der Exponentialfunktion.....	131
5.3.4	Die Logarithmusfunktion	132
5.3.5	Die Exponentialfunktion zur Basis a	133
5.3.6	Die Logarithmusfunktion zur Basis a	134

5.3.7	Potenz- und Wurzelfunktionen	136
5.3.8	Trigonometrische Funktionen.....	139
5.3.9	Arkußfunktionen	144
5.3.10	Hyperbelfunktionen	146
5.3.11	Arefunktionen.....	148
5.4	Aufgaben.....	149
6	Differenzialrechnung mit Funktionen einer Variablen	152
6.1	Einführung und Grundlagen	152
6.2	Ableitungsregeln	157
6.3	Ableitung elementarer Funktionen	160
6.4	Berechnung von Grenzwerten	161
6.5	Extrema, Krümmung und Wendepunkte	164
6.5.1	Extrema von Funktionen	164
6.5.2	Krümmung einer Funktion und Wendepunkte.	175
6.6	Kurvendiskussion.....	178
6.7	Anwendungsbeispiele	181
6.8	Aufgaben.....	183
7	Integralrechnung mit Funktionen von einer Variablen	185
7.1	Einführung und Grundlagen	185
7.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	188
7.3	Grundintegrale	191
7.4	Eigenschaften des Integrals.....	192
7.5	Integrationsmethoden.....	193
7.5.1	Partielle Integration.....	193
7.5.2	Integration durch Substitution	194
7.5.3	Logarithmische Integration.....	197
7.5.4	Integration durch Partialbruchzerlegung.....	198
7.6	Uneigentliche Integrale	200
7.7	Anwendungsbeispiele	203
7.8	Aufgaben.....	206
8	Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen	208
8.1	Grundlagen.....	210
8.1.1	Die endliche geometrische Reihe.....	210
8.1.2	Unendliche Reihen	211
8.2	Potenzreihen.....	213
8.3	Taylorreihen, Taylorentwicklung.....	215
8.4	Fourierreihen, Fourierentwicklung.....	222

8.5 Aufgaben	229
9 Der n-dimensionale Raum und Raumkurven	231
9.1 Der n-dimensionale Raum	231
9.1.1 Grundbegriffe	231
9.1.2 Koordinaten im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	234
9.1.2.1 Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2	234
9.1.2.2 Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	235
9.1.2.3 Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3	235
9.2 Raumkurven.....	237
9.2.1 Tangential- und Normalenvektoren.....	239
9.2.2 Bogenlänge.....	241
9.2.3 Krümmung	243
9.3 Aufgaben	245
10 Differenzialrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	246
10.1 Funktionen von mehreren Variablen.....	246
10.2 Partielle Ableitung und partielle Differenzierbarkeit	249
10.3 Differenzierbarkeit, Linearisierung und Taylorentwicklung	253
10.3.1 Differenzierbarkeit und totales Differenzial.....	253
10.3.2 Ableitung nach einem Parameter	257
10.3.3 Taylorentwicklung	258
10.4 Extrema von Funktionen von mehreren Variablen.....	261
10.4.1 Extrema ohne Nebenbedingungen	262
10.4.2 Extrema mit Nebenbedingungen.....	272
10.5 Aufgaben	278
11 Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	279
11.1 Bereichsintegrale	279
11.1.1 Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen	279
11.1.1.1 Integration in kartesischen Koordinaten	281
11.1.1.2 Integration in Polarkoordinaten	286
11.1.2 Bereichsintegral einer Funktion von drei Variablen.....	290
11.1.2.1 Integration in kartesischen Koordinaten	291
11.1.2.2 Integration in Zylinderkoordinaten	293
11.1.2.3 Integration in Kugelkoordinaten.....	294
11.2 Kurvenintegrale.....	296
11.3 Aufgaben	300

12 Gewöhnliche Differenzialgleichungen.....	302
12.1 Einführung und Grundlagen	304
12.2 Gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	306
12.2.1 Separable Differenzialgleichungen: Trennung der Variablen	306
12.2.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	311
12.2.2.1 Homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	311
12.2.2.2 Inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.....	312
12.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	314
12.3.1 Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	315
12.3.2 Inhomogen lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	319
12.4 Aufgaben.....	324
13 Wahrscheinlichkeitsrechnung	326
13.1 Kombinatorik	327
13.1.1 Permutationen	327
13.1.2 Variationen	329
13.1.3 Kombinationen.....	331
13.1.4 Zusammenfassung.....	333
13.1.5 Aufgaben zu Abschnitt 13.1	333
13.2 Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit.....	334
13.2.1 Zufallsexperimente	334
13.2.2 Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace	335
13.2.3 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	339
13.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes.....	340
13.2.5 Zusammenfassung.....	343
13.2.6 Aufgaben zu Abschnitt 13.2	345
13.3 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	347
13.3.1 Diskrete Zufallsvariablen	348
13.3.1.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion	348
13.3.1.2 Parameter einer diskreten Verteilung.....	350
13.3.2 Stetige Zufallsvariablen	352
13.3.2.1 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	352
13.3.2.2 Parameter einer stetigen Verteilung	354
13.3.3 Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen.....	356
13.3.3.1 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	357
13.3.3.2 Parameter einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	360
13.3.3.3 Summen von Zufallsvariablen	361

13.4	Spezielle Verteilungen.....	363
13.4.1	Diskrete Verteilungen	364
13.4.1.1	Die Binomialverteilung	364
13.4.1.2	Die hypergeometrische Verteilung.....	366
13.4.1.3	Die Poissonverteilung	369
13.4.2	Stetige Verteilungen	370
13.4.2.1	Die Normalverteilung	370
13.4.2.2	Die Lognormalverteilung.....	373
13.4.2.3	Die Exponentialverteilung	375
13.4.2.4	Die Weibullverteilung	377
13.4.2.5	Die t-Verteilung.....	378
13.4.2.6	Die Chi-Quadrat-Verteilung	379
13.4.2.7	Die F-Verteilung.....	380
13.4.3	Anwendungsbeispiele in der Qualitätssicherung.....	381
13.4.4	Die zweidimensionale Normalverteilung.....	384
13.5	Grenzwertsätze und Näherungen.....	386
13.5.1	Die Binomialverteilung als Näherung für die hypergeometrische Verteilung	386
13.5.2	Die Poissonverteilung als Näherung für die Binomialverteilung....	387
13.5.3	Der zentrale Grenzwertsatz und das Gesetz der großen Zahlen.....	387
13.6	Aufgaben zu den Abschnitten 13.3 bis 13.5	392
14	Deskriptive Statistik	394
14.1	Einführung und Grundbegriffe	394
14.2	Univariate deskriptive Statistik	396
14.2.1	Häufigkeitsverteilung und grafische Darstellungen.....	397
14.2.1.1	Keine Klassenbildung.....	397
14.2.1.2	Klassenbildung	398
14.2.2	Maßzahlen	402
14.2.2.1	Lagemaßzahlen.....	402
14.2.2.2	Streuungsmaßzahlen	406
14.2.2.3	Konzentrationsmaßzahl: Gini-Koeffizient.....	407
14.3	Bivariate deskriptive Statistik	410
14.3.1	Häufigkeitstabellen und grafische Darstellungen	410
14.3.2	Maßzahlen	413
14.4	Aufgaben	415
15	Schließende Statistik	416
15.1	Einführung und Grundbegriffe	416

15.2 Schätzen von Parametern	417
15.2.1 Eigenschaften von Schätzfunktionen.....	418
15.2.2 Maximum-Likelihood-Schätzung	420
15.2.3 Konfidenzintervalle	422
15.2.4 Aufgaben zu Abschnitt 15.2	430
15.3 Statistische Tests.....	432
15.3.1 Einführung, Grundbegriffe und Vorgehensweise bei Tests.....	432
15.3.2 Spezielle Parametertests	443
15.3.2.1 Test für den Erwartungswert einer normalverteilten Größe	443
15.3.2.2 Test für die Varianz einer normalverteilten Größe	444
15.3.2.3 Test für den Erwartungswert einer beliebig verteilten Größe.....	444
15.3.2.4 Test für den Parameter p einer binomialverteilten Größe.....	445
15.3.2.5 Test für den Vergleich der Erwartungswerte zweier Größen.....	447
15.3.2.6 Test für den Vergleich der Varianzen zweier normalverteilter Größen	448
15.3.2.7 Test für den Vergleich der Parameter zweier binomialverteilter Größen	449
15.3.2.8 Test für den Korrelationskoeffizienten einer zweidimensionalen Normalverteilung	449
15.3.3 Der Chi-Quadrat-Anpassungstest	451
15.3.4 Unabhängigkeitstests	454
15.3.4.1 Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest	454
15.3.4.2 Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest	456
15.3.5 Der Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	457
15.3.6 Aufgaben zu Abschnitt 15.3	459
16 Lineare Optimierung	463
16.1 Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus	463
16.1.1 Grafische Lösung	465
16.1.2 Der Simplex-Algorithmus.....	467
16.1.3 Sonderfälle	476
16.1.4 Zusammenfassung des Simplex-Algorithmus.....	484
16.1.5 Aufgaben zu Abschnitt 16.1	486
16.2 Transportprobleme	487
16.2.1 Die Struktur von Transportproblemen	487
16.2.2 Der Transportalgorithmus	491
16.2.3 Aufgaben zu Abschnitt 16.2	495
17 Mathematik mit dem Computer	497
17.1 Einführung.....	497

17.2 Lösung mathematischer Probleme mit Maple.....	503
17.2.1 Einführung.....	503
17.2.2 Lösungsbeispiele.....	505
17.2.2.1 Lösen von Gleichungen.....	505
17.2.2.2 Rechnen mit komplexen Zahlen.....	507
17.2.2.3 Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme	509
17.2.2.4 Funktionsgraphen	512
17.2.2.5 Differenzialrechnung	514
17.2.2.6 Integralrechnung.....	515
17.2.2.7 Summen, unendliche Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen	517
17.2.2.8 Grenzwerte.....	518
17.2.2.9 Differenzialgleichungen	518
17.2.2.10 Wahrscheinlichkeitsrechnung	518
17.2.2.11 Lineare Optimierung.....	520
A Lösungen der Aufgaben	521
B Statistik-Tabellen	568
B.1 Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.....	568
B.2 Quantile der t-Verteilung	569
B.3 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	570
B.4 Quantile der F-Verteilung.....	572
B.5 Werte für den Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	588
Literaturverzeichnis	590
Sachwortverzeichnis	593