

Inhaltsverzeichnis

I	Gruppen	1
§ 1	Halbgruppen, Gruppen und Untergruppen	1
1.1	Innere Verknüpfungen und Halbgruppen	1
1.2	Beispiele	2
1.3	Definition einer Gruppe	4
1.4	Abschwächung der Gruppenaxiome	4
1.5	Translationen und Kürzungsregeln	5
1.6	Definition einer Untergruppe	6
1.7	Erzeugung von Untergruppen	7
1.8	Untergruppen von $\mathbb{Z}$, Kongruenzen und Restklassen	8
1.9	Beispiele	11
§ 2	Homomorphismen und Normalteiler	21
2.1	Definition eines Homomorphismus	21
2.2	Beispiele	22
2.3	Nebenklassen	27
2.4	Ordnung und Index	28
2.5	Beispiele	30
2.6	Definition eines Normalteilers	33
2.7	Homomorphismen und Normalteiler	34
2.8	Faktorgruppen	35
2.9	Beispiele	36
§ 3	Isomorphiesätze und Produkte von Gruppen	39
3.1	Isomorphiesätze	39
3.2	Äußeres direktes Produkt	41
3.3	Inneres direktes Produkt	42
3.4	Äußeres semidirektes Produkt*	45
3.5	Inneres semidirektes Produkt*	46
3.6	Beispiele*	49
3.7	Zyklische Gruppen	55
3.8	Teilbarkeit ganzer Zahlen	56
3.9	Produkte zyklischer Gruppen	59
3.10	Untergruppen zyklischer Gruppen	60
3.11	Die Eulersche φ -Funktion	61
3.12	Primrestklassengruppen	63

3.13	Der euklidische Algorithmus	65
3.14	Beispiele	66
§ 4	Operationen von Gruppen auf Mengen	73
4.1	Definition einer Operation	73
4.2	Beispiele und Satz von CAYLEY	74
4.3	Bahnenraum und Standgruppe	75
4.4	Die Klassengleichung	76
4.5	Zyklenzerlegung einer Permutation	78
4.6	Beispiele	80
§ 5	Symmetriegruppen*	85
5.1	Regelmäßige n -Ecke und die Diedergruppe	85
5.2	Endliche Untergruppen von $O(2)$	87
5.3	Symmetrien des Tetraeders	89
5.4	Symmetrien von Würfel und Oktaeder	91
5.5	Symmetrien von Ikosaeder und Dodekaeder	94
5.6	Die Klassengleichung der Ikosaedergruppe	98
5.7	Endliche Untergruppen von $SO(3)$	100
5.8	Symmetrien von Fußbällen	100
§ 6	Struktursätze*	102
6.1	Summen zyklischer Gruppen	102
6.2	Zählung von zyklischen Summanden	103
6.3	Primärzerlegung	105
6.4	Zerlegung von endlichen abelschen p -Gruppen	107
6.5	Elementarteiler	111
6.6	Beispiele	113
6.7	Torsionsuntergruppen	114
6.8	Freie abelsche Gruppen	115
6.9	Endlich erzeugte abelsche Gruppen	120
6.10	Beispiele	121
6.11	Satz von CAUCHY und p -Gruppen	122
6.12	Die Sätze von SYLOW	124
6.13	Beispiele	127
§ 7	Einfache und auflösbare Gruppen*	136
7.1	Einfache Gruppen	136
7.2	Kommutatorgruppen	138
7.3	Beispiele	139
7.4	Auflösbare Gruppen	140
7.5	Auflösbarkeit von p -Gruppen	143
7.6	Beispiele	143
II	Ringe	145
§ 1	Grundbegriffe	145
1.1	Definition eines Rings	145
1.2	Einheiten, Körper, Unterringe	147
1.3	Ringhomomorphismen	149
1.4	Beispiele	149

1.5	Polynomringe	155
1.6	Grad eines Polynoms	159
1.7	Division mit Rest	160
1.8	Nullstellen und Werte von Polynomen	163
1.9	Einheitswurzeln in $\mathbf{C}$	164
1.10	Polynome in mehreren Veränderlichen*	166
1.11	Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers	170
1.12	Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe	171
1.13	Quotientenkörper	172
1.14	Beispiele	174
§ 2	Ideale und Restklassenringe	176
2.1	Definition von Idealen	176
2.2	Ideale und Einheiten	177
2.3	Restklassenringe	178
2.4	Isomorphiesätze	179
2.5	Beispiele	180
2.6	Hauptidealringe und noethersche Ringe	184
2.7	Euklidische Ringe	185
2.8	Beispiele	187
2.9	Der Hilbertsche Basissatz*	189
2.10	Operationen mit Idealen*	192
2.11	Der Chinesische Restesatz*	193
2.12	Beispiele*	195
2.13	Primideale und maximale Ideale	198
2.14	Beispiele	199
2.15	Existenz maximaler Ideale und das Lemma von ZORN*	202
§ 3	Teilbarkeit in Integritätsringen	206
3.1	Teiler und assoziierte Elemente	206
3.2	Irreduzible Elemente und Primelemente	207
3.3	Teilerketten	209
3.4	Primzahlen	211
3.5	Faktorielle Ringe	214
3.6	Gemeinsame Teiler und Vielfache	215
3.7	Polynomringe über faktoriellen Ringen	217
3.8	Irreduzibilitätskriterien für Polynome	222
3.9	Beispiele	223
3.10	Ringe holomorpher Funktionen*	226
3.11	Quadratische Zahlkörper*	227
3.12	Quadratische Zahlringe*	230
3.13	Einheiten in quadratischen Zahlringen*	233
3.14	Euklidische quadratische Zahlringe*	236
3.15	Faktorzerlegung in quadratischen Zahlringen*	240
3.16	Ideale als ideale Zahlen*	245

III Körpererweiterungen	249
§ 1 Grundbegriffe	249
1.1 Charakteristik und Primkörper	249
1.2 Grad einer Körpererweiterung	250
1.3 Adjunktion von Elementen	252
1.4 Algebraische und transzendente Elemente	253
1.5 Das Minimalpolynom	254
1.6 Beispiele	257
1.7 Algebraische Körpererweiterungen	260
1.8 Algebraisch abgeschlossene Körper	262
§ 2 Konstruktion von Körpererweiterungen	266
2.1 Symbolische Adjunktion von Nullstellen	266
2.2 Fortsetzung von Körperisomorphismen	267
2.3 Zerfällungskörper eines Polynoms	269
2.4 Beispiele	274
2.5 Der algebraische Abschluss*	278
§ 3 Einfache und mehrfache Nullstellen	283
3.1 Vielfachheit von Nullstellen und formale Ableitung	283
3.2 Separabilität	286
3.3 Der Frobenius-Homomorphismus	287
3.4 Endliche Körper	288
3.5 Beispiele	291
3.6 Algebraischer Abschluss eines endlichen Körpers	295
3.7 Der Satz vom primitiven Element	296
3.8 Beispiele	297
3.9 Resultanten*	298
3.10 Diskriminanten*	304
3.11 Beispiele*	306
§ 4 Galois-Erweiterungen	311
4.1 Symmetrische Polynome	311
4.2 Relative Automorphismen und Fixkörper	315
4.3 Gruppenordnung und Körpergrad	317
4.4 Galois-Erweiterungen	319
4.5 Der Hauptsatz der Galois-Theorie	321
4.6 Beispiele	323
4.7 Der Fundamentalsatz der Algebra*	326
4.8 Diskriminante und Galois-Gruppe*	331
4.9 Galois-Theorie endlicher Körper*	332
§ 5 Lösung von Polynomgleichungen*	335
5.1 Quadratische Gleichungen	335
5.2 Kubische Gleichungen	336
5.3 Beispiele	339
5.4 Gleichungen vierten Grades	341
5.5 Beispiele	346
5.6 Kreisteilung in Charakteristik Null	350
5.7 Kreisteilung in Charakteristik $p > 0$	354

5.8	Reine Polynome	357
5.9	Zyklische Erweiterungen	359
5.10	Lösbarkeit von Polynomgleichungen	362
5.11	Die allgemeine Polynomgleichung	365
5.12	Gleichungen fünften Grades und das Ikosaeder	367
5.13	Darstellung von Einheitswurzeln	370
5.14	Beispiele	373
5.15	Das Umkehrproblem der Galois-Theorie	377
§ 6	Geometrische Konstruktionen	380
6.1	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	381
6.2	Der Körper der konstruierbaren Punkte	382
6.3	Struktur des Körpers der konstruierbaren Punkte	384
6.4	Unlösbarkeit klassischer Konstruktionsaufgaben	388
6.5	Konstruktion von regelmäßigen n -Ecken*	390
6.6	Andere Regeln für Konstruktionsverfahren	394
Anhang 1	Platonische Körper	395
Anhang 2	Begriffe und Axiome	401
	Literaturverzeichnis	425
	Index	431
	Symbolverzeichnis	437