

Inhalt Band 1

Ableitungen und Geometrie im \mathbb{R}^3	1
1 Was ist Mathematik?	3
1.1 Einleitung	3
1.2 Die moderne Welt	3
1.3 Die Rolle der Mathematik	10
1.4 Entwurf und Herstellung von Autos	11
1.5 Wettervorhersagen und globale Erwärmung	11
1.6 Navigation: Von den Sternen zu GPS	11
1.7 Medizinische Tomographie	13
1.8 Molekulare Dynamik und Arzneimittelforschung	13
1.9 Wirtschaft: Aktien und Optionen	14
1.10 Sprachen	14
1.11 Mathematik als Wissenschaftssprache	15
1.12 Fundamentale Bereiche der Mathematik	16
1.13 Was ist Wissenschaft?	17
1.14 Was ist Bewusstsein?	18
1.15 Wie man dieses Buch als Helfer begreift	19
2 Das mathematische Labor	23
2.1 Einleitung	23
2.2 Mathematikerfahrung	24

3	Einführung in die Modellbildung	29
3.1	Einleitung	29
3.2	Modell einer Mittagssuppe	29
3.3	Das Modell vom schlammigen Hof	32
3.4	Ein Gleichungssystem	33
3.5	Gleichungen aufstellen und lösen	34
4	Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung	37
4.1	Einleitung	37
4.2	Algebraische Gleichungen	38
4.3	Differentialgleichungen	38
4.4	Verallgemeinerung	44
4.5	Der Jugendtraum von Leibniz	46
4.6	Zusammenfassung	48
4.7	Leibniz	49
5	Natürliche und ganze Zahlen	53
5.1	Einleitung	53
5.2	Die natürlichen Zahlen	54
5.3	Gibt es eine größte natürliche Zahl?	57
5.4	Die Menge \mathbb{N} aller natürlichen Zahlen	58
5.5	Ganze Zahlen	60
5.6	Absolutwert und Abstand zwischen Zahlen	62
5.7	Division mit Rest	64
5.8	Zerlegung in Primzahlen	65
5.9	Ganze Zahlen im Computer	66
6	Mathematische Induktion	69
6.1	Induktion	69
6.2	Insektenpopulationen	74
7	Rationale Zahlen	79
7.1	Einleitung	79
7.2	Wie die rationalen Zahlen konstruiert werden	80
7.3	Zur Notwendigkeit der rationalen Zahlen	83
7.4	Dezimale Entwicklungen der rationalen Zahlen	83
7.5	Periodische Dezimaldarstellungen rationaler Zahlen	85
7.6	Mengenschreibweise	89
7.7	Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen	90
7.8	Die rationale Zahlengerade und Intervalle	90
7.9	Bakterienwachstum	92
7.10	Chemisches Gleichgewicht	93
8	Pythagoras und Euklid	97
8.1	Einleitung	97

8.2	Der Satz von Pythagoras	97
8.3	Die Winkelsumme in Dreiecken beträgt 180°	99
8.4	Ähnliche Dreiecke	101
8.5	Wann stehen zwei Gerade senkrecht?	101
8.6	GPS Navigation	104
8.7	Geometrische Definition von $\sin(v)$ und $\cos(v)$	106
8.8	Geometrischer Beweis von Additionsformeln für $\cos(v)$	107
8.9	Erinnerung an einige Flächenformeln	108
8.10	Griechische Mathematik	109
8.11	Die euklidische Ebene \mathbb{Q}^2	110
8.12	Von Pythagoras über Euklid zu Descartes	111
8.13	Nicht-euklidische Geometrie	112
9	Was ist eine Funktion?	115
9.1	Einleitung	115
9.2	Funktionen im täglichen Leben	119
9.3	Darstellung von Funktionen ganzer Zahlen	122
9.4	Darstellung von Funktionen rationaler Zahlen	125
9.5	Eine Funktion zweier Variabler	127
9.6	Funktionen mehrerer Variabler	128
10	Polynomfunktionen	131
10.1	Einleitung	131
10.2	Lineare Polynome	132
10.3	Parallele Geraden	136
10.4	Senkrechte Geraden	136
10.5	Quadratische Polynome	138
10.6	Arithmetik mit Polynomen	142
10.7	Graphen allgemeiner Polynome	148
10.8	Stückweise definierte Polynomfunktionen	150
11	Kombinationen von Funktionen	153
11.1	Einleitung	153
11.2	Summe zweier Funktionen und Produkt einer Funktion mit einer Zahl	154
11.3	Linearkombination von Funktionen	154
11.4	Multiplikation und Division von Funktionen	155
11.5	Rationale Funktionen	155
11.6	Zusammengesetzte Funktionen	157
12	Lipschitz-Stetigkeit	161
12.1	Einleitung	161
12.2	Lipschitz-Stetigkeit einer linearen Funktion	162
12.3	Definition der Lipschitz-Stetigkeit	163
12.4	Monome	167

12.5	Linearkombinationen von Funktionen	169
12.6	Beschränkte Funktionen	170
12.7	Das Produkt von Funktionen	172
12.8	Der Quotient von Funktionen	173
12.9	Zusammengesetzte Funktionen	174
12.10	Funktionen zweier rationaler Variablen	175
12.11	Funktionen mehrerer rationaler Variablen	175
13	Folgen und Grenzwerte	179
13.1	Ein erstes Treffen mit Folgen und Grenzwerten	179
13.2	Ringschraubenschlüsselsatz	181
13.3	J.P. Johanssons verstellbarer Schraubenschlüssel	183
13.4	Die Macht der Sprache: Von unendlich Vielen zu Einem	183
13.5	Die $\epsilon - N$ Definition eines Grenzwertes	185
13.6	Konvergente Folgen haben eindeutige Grenzwerte	189
13.7	Lipschitz-stetige Funktionen und Folgen	189
13.8	Verallgemeinerung auf Funktionen zweier Variablen	191
13.9	Berechnung von Grenzwerten	192
13.10	Computerdarstellung rationaler Zahlen	195
13.11	Sonya Kovalevskaya	196
14	Wurzel Zwei	201
14.1	Einleitung	201
14.2	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl!	203
14.3	Berechnung von $\sqrt{2}$ durch Bisektion	204
14.4	Der Bisektionsalgorithmus konvergiert!	206
14.5	Erste Begegnung mit Cauchy-Folgen	208
14.6	Berechnung von $\sqrt{2}$ mit dem Dekasektionsalgorithmus	209
15	Reelle Zahlen	213
15.1	Einleitung	213
15.2	Addition und Subtraktion reeller Zahlen	215
15.3	Verallgemeinerung zur Lipschitz-stetigen Funktion $f(x, \bar{x})$	217
15.4	Multiplikation und Division reeller Zahlen	218
15.5	Der Absolutbetrag	218
15.6	Vergleich zweier reeller Zahlen	218
15.7	Zusammenfassung der Arithmetik reeller Zahlen	219
15.8	Warum $\sqrt{2}\sqrt{2}$ gleich 2 ist	219
15.9	Betrachtungen über $\sqrt{2}$	220
15.10	Cauchy-Folgen reeller Zahlen	222
15.11	Erweiterung von $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	223
15.12	Lipschitz-Stetigkeit erweiterter Funktionen	223
15.13	Graphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	224

15.14	Erweiterung einer Lipschitz-stetigen Funktion	224
15.15	Intervalle reeller Zahlen	226
15.16	Was ist $f(x)$ für irrationales x ?	227
15.17	Stetigkeit versus Lipschitz-Stetigkeit	229
16	Bisektion für $f(x) = 0$	235
16.1	Bisektion	235
16.2	Ein Beispiel	237
16.3	Berechnungsaufwand	239
17	Streiten Mathematiker?*	243
17.1	Einleitung	243
17.2	Die Formalisten	246
17.3	Die Logiker und die Mengentheorie	246
17.4	Die Konstruktivisten	249
17.5	Peano'sche Axiome für natürliche Zahlen	251
17.6	Reelle Zahlen	252
17.7	Cantor versus Kronecker	253
17.8	Wann sind Zahlen rational oder irrational?	255
17.9	Die Menge aller möglichen Bücher	255
17.10	Rezepte und gutes Essen	256
17.11	„Neue Mathematik“ in der Grundschule	257
17.12	Die Suche nach Stringenz in der Mathematik	258
17.13	Ein nicht konstruktiver Beweis	259
17.14	Zusammenfassung	260
18	Die Funktion $y = x^r$	265
18.1	Die Funktion \sqrt{x}	265
18.2	Rechnen mit der Funktion \sqrt{x}	266
18.3	Ist \sqrt{x} Lipschitz-stetig auf \mathbb{R}^+ ?	266
18.4	Die Funktion x^r für rationales $r = \frac{p}{q}$	267
18.5	Rechnen mit der Funktion x^r	267
18.6	Verallgemeinerung der Lipschitz-Stetigkeit	267
18.7	Turbulente Strömung ist Hölder- (Lipschitz-)stetig zum Exponenten $\frac{1}{3}$	268
19	Fixpunkte und kontrahierende Abbildungen	269
19.1	Einleitung	269
19.2	Kontrahierende Abbildungen	270
19.3	$f(x) = 0$ umformuliert zu $x = g(x)$	271
19.4	Kartenverkaufsmodell	272
19.5	Modell für das Privateinkommen	273
19.6	Fixpunkt-Iteration im Kartenverkaufsmodell	274
19.7	Eine kontrahierende Abbildung hat einen eindeutigen Fixpunkt	278

19.8	Verallgemeinerung auf $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$	280
19.9	Lineare Konvergenz der Fixpunkt-Iteration	281
19.10	Schnellere Konvergenz	282
19.11	Quadratische Konvergenz	283
20	Analytische Geometrie in \mathbb{R}^2	289
20.1	Einleitung	289
20.2	Descartes, Erfinder der analytischen Geometrie	290
20.3	Descartes: Dualismus von Körper und Seele	291
20.4	Die euklidische Ebene \mathbb{R}^2	292
20.5	Vermesser und Navigatoren	294
20.6	Ein erster Blick auf Vektoren	294
20.7	Geordnete Paare als Punkte oder Vektoren/Pfeile	296
20.8	Vektoraddition	297
20.9	Vektoraddition und das Parallelogramm	297
20.10	Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl	298
20.11	Die Norm eines Vektors	299
20.12	Polardarstellung von Vektoren	300
20.13	Standardisierte Basisvektoren	302
20.14	Skalarprodukt	302
20.15	Eigenschaften des Skalarproduktes	303
20.16	Geometrische Interpretation des Skalarproduktes	304
20.17	Orthogonalität und Skalarprodukt	305
20.18	Projektion eines Vektors auf einen Vektor	307
20.19	Drehung um 90°	309
20.20	Drehung um einen beliebigen Winkel θ	310
20.21	Nochmals Drehung um θ !	311
20.22	Drehung eines Koordinatensystems	312
20.23	Vektorprodukt	312
20.24	Die Fläche eines Dreiecks mit einer Ecke im Ursprung	314
20.25	Fläche eines beliebigen Dreiecks	315
20.26	Die Fläche eines durch zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms	316
20.27	Geraden	317
20.28	Projektion eines Punktes auf eine Gerade	319
20.29	Wann sind zwei Geraden parallel?	319
20.30	Ein System zweier linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten	320
20.31	Lineare Unabhängigkeit und Basis	322
20.32	Die Verbindung zur Infinitesimalrechnung einer Variablen	324
20.33	Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	324
20.34	Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	324
20.35	Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme	325
20.36	Eine erste Begegnung mit Matrizen	326

20.37	Erste Anwendungen der Matrixschreibweise	327
20.38	Addition von Matrizen	328
20.39	Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	329
20.40	Multiplikation zweier Matrizen	329
20.41	Die Transponierte einer Matrix	330
20.42	Die Transponierte eines 2-Spaltenvektors	331
20.43	Die Einheitsmatrix	331
20.44	Die Inverse einer Matrix	331
20.45	Nochmals Drehung in Matrixschreibweise!	332
20.46	Eine Spiegelung in Matrixschreibweise	333
20.47	Nochmals Basiswechsel!	333
20.48	Königin Christina	334
21	Analytische Geometrie in \mathbb{R}^3	339
21.1	Einleitung	339
21.2	Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar	341
21.3	Skalarprodukt und Norm	341
21.4	Projektion eines Vektors auf einen Vektor	342
21.5	Der Winkel zwischen zwei Vektoren	343
21.6	Vektorprodukt	344
21.7	Geometrische Interpretation des Vektorprodukts	345
21.8	Zusammenhang zwischen den Vektorprodukten in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	346
21.9	Volumen eines von drei Vektoren aufgespannten schiefen Würfels	347
21.10	Das Dreifach-Produkt $a \cdot b \times c$	348
21.11	Eine Formel für das von drei Vektoren aufgespannte Volumen	348
21.12	Geraden	349
21.13	Projektion eines Punktes auf eine Gerade	350
21.14	Ebenen	351
21.15	Schnitt einer Geraden mit einer Ebene	353
21.16	Zwei sich schneidende Ebenen ergeben eine Gerade	353
21.17	Projektion eines Punktes auf eine Ebene	354
21.18	Abstand zwischen Punkt und Ebene	355
21.19	Drehung um einen Vektor	356
21.20	Unterräume	357
21.21	3 lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten	357
21.22	Lösung eines 3×3 Systems durch Gauss-Elimination	359
21.23	3×3 -Matrizen: Summe, Produkt und Transponierte	360
21.24	Betrachtungsweisen für lineare Gleichungssysteme	362
21.25	Nicht-singuläre Matrizen	363
21.26	Die Inverse einer Matrix	364
21.27	Verschiedene Basen	364
21.28	Linear unabhängige Menge von Vektoren	365

21.29	Orthogonale Matrizen	365
21.30	Lineare Abbildungen vs. Matrizen	366
21.31	Das Skalarprodukt ist invariant unter orthogonalen Abbildungen	367
21.32	Ausblick auf Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	368
22	Komplexe Zahlen	371
22.1	Einleitung	371
22.2	Addition und Multiplikation	373
22.3	Die Dreiecksungleichung	374
22.4	Offene Gebiete	374
22.5	Polardarstellung komplexer Zahlen	374
22.6	Geometrische Interpretation der Multiplikation	375
22.7	Komplexe Konjugation	376
22.8	Division	376
22.9	Der Fundamentalsatz der Algebra	376
22.10	Wurzeln	377
22.11	Lösung der quadratischen Gleichung $w^2 + 2bw + c = 0$	377
22.12	Gösta Mittag-Leffler	378
23	Ableitungen	381
23.1	Veränderungsraten	381
23.2	Steuern bezahlen	382
23.3	Wandern	385
23.4	Definition der Ableitung	385
23.5	Die Ableitung einer linearen Funktion ist konstant	388
23.6	Die Ableitung von x^2 ist $2x$	389
23.7	Die Ableitung von x^n ist nx^{n-1}	391
23.8	Die Ableitung von $\frac{1}{x}$ ist $-\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$	391
23.9	Die Ableitung als Funktion	391
23.10	Schreibweise der Ableitung von $f(x)$ als $Df(x)$	392
23.11	Schreibweise der Ableitung von $f(x)$ als $\frac{df}{dx}$	393
23.12	Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten	394
23.13	Wie wird die Ableitung berechnet?	396
23.14	Gleichmäßige Differenzierbarkeit auf einem Intervall	398
23.15	Eine beschränkte Ableitung impliziert Lipschitz-Stetigkeit	399
23.16	Ein etwas anderer Blickwinkel	400
23.17	Swedenborg	401
24	Ableitungsregeln	405
24.1	Einleitung	405
24.2	Regel für Linearkombinationen	406
24.3	Produktregel	407
24.4	Kettenregel	408

24.5	Quotientenregel	410
24.6	Ableitungen von Ableitungen: $f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}$. . .	411
24.7	Einseitige Ableitungen	412
24.8	Quadratische Näherung: Taylor-Formel zweiter Ordnung	412
24.9	Ableitung einer inversen Funktion	415
24.10	Implizite Ableitung	416
24.11	Partielle Ableitung	417
24.12	Zwischenbilanz	419
25	Die Newton-Methode	421
25.1	Einleitung	421
25.2	Konvergenz der Fixpunkt-Iteration	421
25.3	Die Newton-Methode	422
25.4	Die Newton-Methode konvergiert quadratisch	423
25.5	Geometrische Interpretation der Newton-Methode . . .	424
25.6	Wie groß ist der Fehler einer Nullstellennäherung? . .	425
25.7	Endkriterium	428
25.8	Global konvergente Newton-Methoden	428
26	Galileo, Newton, Hooke, Malthus und Fourier	431
26.1	Einleitung	431
26.2	Newtons Bewegungsgesetz	432
26.3	Galileos Bewegungsgesetze	433
26.4	Das Hookesche Gesetz	436
26.5	Newtonsches Gesetz plus Hookesches Gesetz	437
26.6	Fouriersches Gesetz der Wärmeausbreitung	438
26.7	Newton und der Raketenantrieb	439
26.8	Malthus und Populationswachstum	440
26.9	Einsteinsches Bewegungsgesetz	442
26.10	Zusammenfassung	443
	Literaturverzeichnis	447
	Sachverzeichnis	449