

# Inhalt Band 1

<b>Ableitungen und Geometrie im <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>1</b>
<b>1 Was ist Mathematik?</b>	<b>3</b>
1.1 Einleitung . . . . .	3
1.2 Die moderne Welt . . . . .	3
1.3 Die Rolle der Mathematik . . . . .	10
1.4 Entwurf und Herstellung von Autos . . . . .	11
1.5 Wettervorhersagen und globale Erwärmung . . . . .	11
1.6 Navigation: Von den Sternen zu GPS . . . . .	11
1.7 Medizinische Tomographie . . . . .	13
1.8 Molekulare Dynamik und Arzneimittelforschung . . . . .	13
1.9 Wirtschaft: Aktien und Optionen . . . . .	14
1.10 Sprachen . . . . .	14
1.11 Mathematik als Wissenschaftssprache . . . . .	15
1.12 Fundamentale Bereiche der Mathematik . . . . .	16
1.13 Was ist Wissenschaft? . . . . .	17
1.14 Was ist Bewusstsein? . . . . .	18
1.15 Wie man dieses Buch als Helfer begreift . . . . .	19
<b>2 Das mathematische Labor</b>	<b>23</b>
2.1 Einleitung . . . . .	23
2.2 Mathematikerfahrung . . . . .	24

<b>3 Einführung in die Modellbildung</b>	<b>29</b>
3.1 Einleitung . . . . .	29
3.2 Modell einer Mittagssuppe . . . . .	29
3.3 Das Modell vom schlammigen Hof . . . . .	32
3.4 Ein Gleichungssystem . . . . .	33
3.5 Gleichungen aufstellen und lösen . . . . .	34
<b>4 Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung</b>	<b>37</b>
4.1 Einleitung . . . . .	37
4.2 Algebraische Gleichungen . . . . .	38
4.3 Differentialgleichungen . . . . .	38
4.4 Verallgemeinerung . . . . .	44
4.5 Der Jugendtraum von Leibniz . . . . .	46
4.6 Zusammenfassung . . . . .	48
4.7 Leibniz . . . . .	49
<b>5 Natürliche und ganze Zahlen</b>	<b>53</b>
5.1 Einleitung . . . . .	53
5.2 Die natürlichen Zahlen . . . . .	54
5.3 Gibt es eine größte natürliche Zahl? . . . . .	57
5.4 Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen . . . . .	58
5.5 Ganze Zahlen . . . . .	60
5.6 Absolutwert und Abstand zwischen Zahlen . . . . .	62
5.7 Division mit Rest . . . . .	64
5.8 Zerlegung in Primzahlen . . . . .	65
5.9 Ganze Zahlen im Computer . . . . .	66
<b>6 Mathematische Induktion</b>	<b>69</b>
6.1 Induktion . . . . .	69
6.2 Insektenpopulationen . . . . .	74
<b>7 Rationale Zahlen</b>	<b>79</b>
7.1 Einleitung . . . . .	79
7.2 Wie die rationalen Zahlen konstruiert werden . . . . .	80
7.3 Zur Notwendigkeit der rationalen Zahlen . . . . .	83
7.4 Dezimale Entwicklungen der rationalen Zahlen . . . . .	83
7.5 Periodische Dezimaldarstellungen rationaler Zahlen . . . . .	85
7.6 Mengenschreibweise . . . . .	89
7.7 Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen . . . . .	90
7.8 Die rationale Zahlengerade und Intervalle . . . . .	90
7.9 Bakterienwachstum . . . . .	92
7.10 Chemisches Gleichgewicht . . . . .	93
<b>8 Pythagoras und Euklid</b>	<b>97</b>
8.1 Einleitung . . . . .	97

8.2	Der Satz von Pythagoras . . . . .	97
8.3	Die Winkelsumme in Dreiecken beträgt $180^\circ$ . . . . .	99
8.4	Ähnliche Dreiecke . . . . .	101
8.5	Wann stehen zwei Gerade senkrecht? . . . . .	101
8.6	GPS Navigation . . . . .	104
8.7	Geometrische Definition von $\sin(v)$ und $\cos(v)$ . . . . .	106
8.8	Geometrischer Beweis von Additionsformeln für $\cos(v)$ . . . . .	107
8.9	Erinnerung an einige Flächenformeln . . . . .	108
8.10	Griechische Mathematik . . . . .	109
8.11	Die euklidische Ebene $\mathbb{Q}^2$ . . . . .	110
8.12	Von Pythagoras über Euklid zu Descartes . . . . .	111
8.13	Nicht-euklidische Geometrie . . . . .	112
<b>9</b>	<b>Was ist eine Funktion?</b>	<b>115</b>
9.1	Einleitung . . . . .	115
9.2	Funktionen im täglichen Leben . . . . .	119
9.3	Darstellung von Funktionen ganzer Zahlen . . . . .	122
9.4	Darstellung von Funktionen rationaler Zahlen . . . . .	125
9.5	Eine Funktion zweier Variabler . . . . .	127
9.6	Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	128
<b>10</b>	<b>Polynomfunktionen</b>	<b>131</b>
10.1	Einleitung . . . . .	131
10.2	Lineare Polynome . . . . .	132
10.3	Parallele Geraden . . . . .	136
10.4	Senkrechte Geraden . . . . .	136
10.5	Quadratische Polynome . . . . .	138
10.6	Arithmetik mit Polynomen . . . . .	142
10.7	Graphen allgemeiner Polynome . . . . .	148
10.8	Stückweise definierte Polynomfunktionen . . . . .	150
<b>11</b>	<b>Kombinationen von Funktionen</b>	<b>153</b>
11.1	Einleitung . . . . .	153
11.2	Summe zweier Funktionen und Produkt einer Funktion mit einer Zahl . . . . .	154
11.3	Linearkombination von Funktionen . . . . .	154
11.4	Multiplikation und Division von Funktionen . . . . .	155
11.5	Rationale Funktionen . . . . .	155
11.6	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	157
<b>12</b>	<b>Lipschitz-Stetigkeit</b>	<b>161</b>
12.1	Einleitung . . . . .	161
12.2	Lipschitz-Stetigkeit einer linearen Funktion . . . . .	162
12.3	Definition der Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	163
12.4	Monome . . . . .	167

12.5	Linearkombinationen von Funktionen . . . . .	169
12.6	Beschränkte Funktionen . . . . .	170
12.7	Das Produkt von Funktionen . . . . .	172
12.8	Der Quotient von Funktionen . . . . .	173
12.9	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	174
12.10	Funktionen zweier rationaler Variablen . . . . .	175
12.11	Funktionen mehrerer rationaler Variablen . . . . .	175
<b>13</b>	<b>Folgen und Grenzwerte</b>	<b>179</b>
13.1	Ein erstes Treffen mit Folgen und Grenzwerten . . . . .	179
13.2	Ringschraubenschlüsselsatz . . . . .	181
13.3	J.P. Johanssons verstellbarer Schraubenschlüssel . . . . .	183
13.4	Die Macht der Sprache: Von unendlich Vielen zu Einem . . . . .	183
13.5	Die $\epsilon - N$ Definition eines Grenzwertes . . . . .	185
13.6	Konvergente Folgen haben eindeutige Grenzwerte . . . . .	189
13.7	Lipschitz-stetige Funktionen und Folgen . . . . .	189
13.8	Verallgemeinerung auf Funktionen zweier Variablen . . . . .	191
13.9	Berechnung von Grenzwerten . . . . .	192
13.10	Computerdarstellung rationaler Zahlen . . . . .	195
13.11	Sonya Kovalevskaya . . . . .	196
<b>14</b>	<b>Wurzel Zwei</b>	<b>201</b>
14.1	Einleitung . . . . .	201
14.2	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl! . . . . .	203
14.3	Berechnung von $\sqrt{2}$ durch Bisektion . . . . .	204
14.4	Der Bisektionsalgorithmus konvergiert! . . . . .	206
14.5	Erste Begegnung mit Cauchy-Folgen . . . . .	208
14.6	Berechnung von $\sqrt{2}$ mit dem Dekasektionsalgorithmus	209
<b>15</b>	<b>Reelle Zahlen</b>	<b>213</b>
15.1	Einleitung . . . . .	213
15.2	Addition und Subtraktion reeller Zahlen . . . . .	215
15.3	Verallgemeinerung zur Lipschitz-stetigen Funktion $f(x, \bar{x})$ . . . . .	217
15.4	Multiplikation und Division reeller Zahlen . . . . .	218
15.5	Der Absolutbetrag . . . . .	218
15.6	Vergleich zweier reeller Zahlen . . . . .	218
15.7	Zusammenfassung der Arithmetik reeller Zahlen . . . . .	219
15.8	Warum $\sqrt{2}\sqrt{2}$ gleich 2 ist . . . . .	219
15.9	Betrachtungen über $\sqrt{2}$ . . . . .	220
15.10	Cauchy-Folgen reeller Zahlen . . . . .	222
15.11	Erweiterung von $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ zu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	223
15.12	Lipschitz-Stetigkeit erweiterter Funktionen . . . . .	223
15.13	Graphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	224

15.14	Erweiterung einer Lipschitz-stetigen Funktion . . . . .	224
15.15	Intervalle reeller Zahlen . . . . .	226
15.16	Was ist $f(x)$ für irrationales $x$ ? . . . . .	227
15.17	Stetigkeit versus Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	229
<b>16</b>	<b>Bisektion für <math>f(x) = 0</math></b>	<b>235</b>
16.1	Bisektion . . . . .	235
16.2	Ein Beispiel . . . . .	237
16.3	Berechnungsaufwand . . . . .	239
<b>17</b>	<b>Streiten Mathematiker?*</b>	<b>243</b>
17.1	Einleitung . . . . .	243
17.2	Die Formalisten . . . . .	246
17.3	Die Logiker und die Mengentheorie . . . . .	246
17.4	Die Konstruktivisten . . . . .	249
17.5	Peano'sche Axiome für natürliche Zahlen . . . . .	251
17.6	Reelle Zahlen . . . . .	252
17.7	Cantor versus Kronecker . . . . .	253
17.8	Wann sind Zahlen rational oder irrational? . . . . .	255
17.9	Die Menge aller möglichen Bücher . . . . .	255
17.10	Rezepte und gutes Essen . . . . .	256
17.11	„Neue Mathematik“ in der Grundschule . . . . .	257
17.12	Die Suche nach Stringenz in der Mathematik . . . . .	258
17.13	Ein nicht konstruktiver Beweis . . . . .	259
17.14	Zusammenfassung . . . . .	260
<b>18</b>	<b>Die Funktion <math>y = x^r</math></b>	<b>265</b>
18.1	Die Funktion $\sqrt{x}$ . . . . .	265
18.2	Rechnen mit der Funktion $\sqrt{x}$ . . . . .	266
18.3	Ist $\sqrt{x}$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^+$ ? . . . . .	266
18.4	Die Funktion $x^r$ für rationales $r = \frac{p}{q}$ . . . . .	267
18.5	Rechnen mit der Funktion $x^r$ . . . . .	267
18.6	Verallgemeinerung der Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	267
18.7	Turbulente Strömung ist Hölder- (Lipschitz-)stetig zum Exponenten $\frac{1}{3}$ . . . . .	268
<b>19</b>	<b>Fixpunkte und kontrahierende Abbildungen</b>	<b>269</b>
19.1	Einleitung . . . . .	269
19.2	Kontrahierende Abbildungen . . . . .	270
19.3	$f(x) = 0$ umformuliert zu $x = g(x)$ . . . . .	271
19.4	Kartenverkaufsmodell . . . . .	272
19.5	Modell für das Privateinkommen . . . . .	273
19.6	Fixpunkt-Iteration im Kartenverkaufsmodell . . . . .	274
19.7	Eine kontrahierende Abbildung hat einen eindeutigen Fixpunkt . . . . .	278

19.8	Verallgemeinerung auf $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . . . . .	280
19.9	Lineare Konvergenz der Fixpunkt-Iteration . . . . .	281
19.10	Schnellere Konvergenz . . . . .	282
19.11	Quadratische Konvergenz . . . . .	283
<b>20</b>	<b>Analytische Geometrie in <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>289</b>
20.1	Einleitung . . . . .	289
20.2	Descartes, Erfinder der analytischen Geometrie . . . . .	290
20.3	Descartes: Dualismus von Körper und Seele . . . . .	291
20.4	Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ . . . . .	292
20.5	Vermesser und Navigatoren . . . . .	294
20.6	Ein erster Blick auf Vektoren . . . . .	294
20.7	Geordnete Paare als Punkte oder Vektoren/Pfeile . . . . .	296
20.8	Vektoraddition . . . . .	297
20.9	Vektoraddition und das Parallelogramm . . . . .	297
20.10	Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl . . . . .	298
20.11	Die Norm eines Vektors . . . . .	299
20.12	Polardarstellung von Vektoren . . . . .	300
20.13	Standardisierte Basisvektoren . . . . .	302
20.14	Skalarprodukt . . . . .	302
20.15	Eigenschaften des Skalarproduktes . . . . .	303
20.16	Geometrische Interpretation des Skalarproduktes . . . . .	304
20.17	Orthogonalität und Skalarprodukt . . . . .	305
20.18	Projektion eines Vektors auf einen Vektor . . . . .	307
20.19	Drehung um $90^\circ$ . . . . .	309
20.20	Drehung um einen beliebigen Winkel $\theta$ . . . . .	310
20.21	Nochmals Drehung um $\theta$ ! . . . . .	311
20.22	Drehung eines Koordinatensystems . . . . .	312
20.23	Vektorprodukt . . . . .	312
20.24	Die Fläche eines Dreiecks mit einer Ecke im Ursprung . . . . .	314
20.25	Fläche eines beliebigen Dreiecks . . . . .	315
20.26	Die Fläche eines durch zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms . . . . .	316
20.27	Geraden . . . . .	317
20.28	Projektion eines Punktes auf eine Gerade . . . . .	319
20.29	Wann sind zwei Geraden parallel? . . . . .	319
20.30	Ein System zweier linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	320
20.31	Lineare Unabhängigkeit und Basis . . . . .	322
20.32	Die Verbindung zur Infinitesimalrechnung einer Variablen . . . . .	324
20.33	Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	324
20.34	Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . . . . .	324
20.35	Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme . . . . .	325
20.36	Eine erste Begegnung mit Matrizen . . . . .	326

20.37	Erste Anwendungen der Matrixschreibweise . . . . .	327
20.38	Addition von Matrizen . . . . .	328
20.39	Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl . . . . .	329
20.40	Multiplikation zweier Matrizen . . . . .	329
20.41	Die Transponierte einer Matrix . . . . .	330
20.42	Die Transponierte eines 2-Spaltenvektors . . . . .	331
20.43	Die Einheitsmatrix . . . . .	331
20.44	Die Inverse einer Matrix . . . . .	331
20.45	Nochmals Drehung in Matrixschreibweise! . . . . .	332
20.46	Eine Spiegelung in Matrixschreibweise . . . . .	333
20.47	Nochmals Basiswechsel! . . . . .	333
20.48	Königin Christina . . . . .	334
<b>21</b>	<b>Analytische Geometrie in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>339</b>
21.1	Einleitung . . . . .	339
21.2	Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	341
21.3	Skalarprodukt und Norm . . . . .	341
21.4	Projektion eines Vektors auf einen Vektor . . . . .	342
21.5	Der Winkel zwischen zwei Vektoren . . . . .	343
21.6	Vektorprodukt . . . . .	344
21.7	Geometrische Interpretation des Vektorprodukts . . . . .	345
21.8	Zusammenhang zwischen den Vektorprodukten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ . . . . .	346
21.9	Volumen eines von drei Vektoren aufgespannten schiefen Würfels . . . . .	347
21.10	Das Dreifach-Produkt $a \cdot b \times c$ . . . . .	348
21.11	Eine Formel für das von drei Vektoren aufgespannte Volumen . . . . .	348
21.12	Geraden . . . . .	349
21.13	Projektion eines Punktes auf eine Gerade . . . . .	350
21.14	Ebenen . . . . .	351
21.15	Schnitt einer Geraden mit einer Ebene . . . . .	353
21.16	Zwei sich schneidende Ebenen ergeben eine Gerade . . . . .	353
21.17	Projektion eines Punktes auf eine Ebene . . . . .	354
21.18	Abstand zwischen Punkt und Ebene . . . . .	355
21.19	Drehung um einen Vektor . . . . .	356
21.20	Unterräume . . . . .	357
21.21	3 lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten . . . . .	357
21.22	Lösung eines $3 \times 3$ Systems durch Gauss-Elimination . . . . .	359
21.23	$3 \times 3$ -Matrizen: Summe, Produkt und Transponierte . . . . .	360
21.24	Betrachtungsweisen für lineare Gleichungssysteme . . . . .	362
21.25	Nicht-singuläre Matrizen . . . . .	363
21.26	Die Inverse einer Matrix . . . . .	364
21.27	Verschiedene Basen . . . . .	364
21.28	Linear unabhängige Menge von Vektoren . . . . .	365

21.29	Orthogonale Matrizen . . . . .	365
21.30	Lineare Abbildungen vs. Matrizen . . . . .	366
21.31	Das Skalarprodukt ist invariant unter orthogonalen Abbildungen . . . . .	367
21.32	Ausblick auf Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . .	368
<b>22</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>371</b>
22.1	Einleitung . . . . .	371
22.2	Addition und Multiplikation . . . . .	373
22.3	Die Dreiecksungleichung . . . . .	374
22.4	Offene Gebiete . . . . .	374
22.5	Polardarstellung komplexer Zahlen . . . . .	374
22.6	Geometrische Interpretation der Multiplikation . . . . .	375
22.7	Komplexe Konjugation . . . . .	376
22.8	Division . . . . .	376
22.9	Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	376
22.10	Wurzeln . . . . .	377
22.11	Lösung der quadratischen Gleichung $w^2 + 2bw + c = 0$ . . . . .	377
22.12	Gösta Mittag-Leffler . . . . .	378
<b>23</b>	<b>Ableitungen</b>	<b>381</b>
23.1	Veränderungsraten . . . . .	381
23.2	Steuern bezahlen . . . . .	382
23.3	Wandern . . . . .	385
23.4	Definition der Ableitung . . . . .	385
23.5	Die Ableitung einer linearen Funktion ist konstant . . . . .	388
23.6	Die Ableitung von $x^2$ ist $2x$ . . . . .	389
23.7	Die Ableitung von $x^n$ ist $nx^{n-1}$ . . . . .	391
23.8	Die Ableitung von $\frac{1}{x}$ ist $-\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$ . . . . .	391
23.9	Die Ableitung als Funktion . . . . .	391
23.10	Schreibweise der Ableitung von $f(x)$ als $Df(x)$ . . . . .	392
23.11	Schreibweise der Ableitung von $f(x)$ als $\frac{df}{dx}$ . . . . .	393
23.12	Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten . . . . .	394
23.13	Wie wird die Ableitung berechnet? . . . . .	396
23.14	Gleichmäßige Differenzierbarkeit auf einem Intervall . . . . .	398
23.15	Eine beschränkte Ableitung impliziert Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	399
23.16	Ein etwas anderer Blickwinkel . . . . .	400
23.17	Swedenborg . . . . .	401
<b>24</b>	<b>Ableitungsregeln</b>	<b>405</b>
24.1	Einleitung . . . . .	405
24.2	Regel für Linearkombinationen . . . . .	406
24.3	Produktregel . . . . .	407
24.4	Kettenregel . . . . .	408

24.5	Quotientenregel . . . . .	410
24.6	Ableitungen von Ableitungen: $f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}$ . . . . .	411
24.7	Einseitige Ableitungen . . . . .	412
24.8	Quadratische Näherung: Taylor-Formel zweiter Ordnung . . . . .	412
24.9	Ableitung einer inversen Funktion . . . . .	415
24.10	Implizite Ableitung . . . . .	416
24.11	Partielle Ableitung . . . . .	417
24.12	Zwischenbilanz . . . . .	419
<b>25</b>	<b>Die Newton-Methode</b>	<b>421</b>
25.1	Einleitung . . . . .	421
25.2	Konvergenz der Fixpunkt-Iteration . . . . .	421
25.3	Die Newton-Methode . . . . .	422
25.4	Die Newton-Methode konvergiert quadratisch . . . . .	423
25.5	Geometrische Interpretation der Newton-Methode . . . . .	424
25.6	Wie groß ist der Fehler einer Nullstellennäherung? . . . . .	425
25.7	Endkriterium . . . . .	428
25.8	Global konvergente Newton-Methoden . . . . .	428
<b>26</b>	<b>Galileo, Newton, Hooke, Malthus und Fourier</b>	<b>431</b>
26.1	Einleitung . . . . .	431
26.2	Newton's Bewegungsgesetz . . . . .	432
26.3	Galileos Bewegungsgesetze . . . . .	433
26.4	Das Hookesche Gesetz . . . . .	436
26.5	Newton'sches Gesetz plus Hookesches Gesetz . . . . .	437
26.6	Fouriersches Gesetz der Wärmeausbreitung . . . . .	438
26.7	Newton und der Raketenantrieb . . . . .	439
26.8	Malthus und Populationswachstum . . . . .	440
26.9	Einstinsches Bewegungsgesetz . . . . .	442
26.10	Zusammenfassung . . . . .	443
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>447</b>
<b>Sachverzeichnis</b>		<b>449</b>