

Inhalt Band 2

Integrale und Geometrie in \mathbb{R}^n	453
27 Das Integral	455
27.1 Stammfunktionen und Integrale	455
27.2 Stammfunktion von $f(x) = x^m$ für $m = 0, 1, 2, \dots$	459
27.3 Stammfunktion von $f(x) = x^m$ für $m = -2, -3, \dots$	460
27.4 Stammfunktion von $f(x) = x^r$ für $r \neq -1$	460
27.5 Ein kurzer Überblick über den bisherigen Fortschritt	461
27.6 „Schr kurzer Beweis“ des Fundamentalsatzes	462
27.7 „Kurzer Beweis“ des Fundamentalsatzes	463
27.8 Beweis des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung	464
27.9 Bemerkungen zur Schreibweise	471
27.10 Alternative Berechnungsmethoden	472
27.11 Das Fahrradtachometer	472
27.12 Geometrische Interpretation des Integrals	472
27.13 Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen	475
27.14 Ein analoger Integrator	476
28 Eigenschaften von Integralen	479
28.1 Einleitung	479
28.2 Vertauschen der oberen und unteren Grenzen	480
28.3 Das Ganze ergibt sich aus Teilsummen	480

28.4	Integration stückweise Lipschitz-stetiger Funktionen	481
28.5	Linearität	482
28.6	Monotonie	483
28.7	Dreiecksungleichung für Integrale	483
28.8	Ableitung und Integration sind inverse Operationen	484
28.9	Änderung der Variablen oder Substitution	485
28.10	Partielle Integration	487
28.11	Der Mittelwertsatz	488
28.12	Monotone Funktionen und das Vorzeichen der Ableitung	490
28.13	Funktionen mit Ableitung Null sind konstant	490
28.14	Eine beschränkte Ableitung impliziert Lipschitz-Stetigkeit	491
28.15	Satz von Taylor	491
28.16	29. Oktober 1675	494
28.17	Das Odometer	495
29	Der Logarithmus $\log(x)$	499
29.1	Die Definition von $\log(x)$	499
29.2	Die Bedeutung des Logarithmus	500
29.3	Wichtige Eigenschaften von $\log(x)$	501
30	Numerische Quadratur	505
30.1	Berechnung von Integralen	505
30.2	Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen	509
30.3	Die Mittelpunktsmethode	510
30.4	Adaptive Quadratur	512
31	Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$	517
31.1	Einleitung	517
31.2	Konstruktion der Exponentialfunktion $\exp(x)$ für $x \geq 0$	519
31.3	Erweiterung der Exponentialfunktion $\exp(x)$ auf $x < 0$	524
31.4	Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$	524
31.5	Eine wichtige Eigenschaft von $\exp(x)$	525
31.6	Die Inverse der Exponentialfunktion ist der Logarithmus	526
31.7	Die Funktion a^x mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$	527
32	Trigonometrische Funktionen	531
32.1	Die definierende Differentialgleichung	531
32.2	Trigonometrische Formeln	535
32.3	Die Funktionen $\tan(x)$ und $\cot(x)$ und deren Ableitungen	536
32.4	Inverse der trigonometrischen Funktionen	537

32.5	Die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$	539
32.6	Die hängende Kette	540
32.7	Vergleich von $u'' + k^2 u(x) = 0$ und $u'' - k^2 u(x) = 0$. .	541
33	Die Funktionen $\exp(z)$, $\log(z)$, $\sin(z)$ und $\cos(z)$ für $z \in \mathbb{C}$	545
33.1	Einleitung	545
33.2	Definition von $\exp(z)$	545
33.3	Definition von $\sin(z)$ und $\cos(z)$	546
33.4	Formel von de Moivres	546
33.5	Definition von $\log(z)$	547
34	Integrationstechniken	549
34.1	Einleitung	549
34.2	Rationale Funktionen: Einfache Fälle	550
34.3	Rationale Funktionen: Partialbruchzerlegung	551
34.4	Produkte von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen mit Polynomen	556
34.5	Kombinationen von trigonometrischen und Wurzelfunktionen	557
34.6	Produkte von trigonometrischen und Exponentialfunktionen	557
34.7	Produkte von Polynomen mit dem Logarithmus	557
35	Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe von $\exp(x)$	559
35.1	Einleitung	559
35.2	Verallgemeinerung auf $u'(x) = \lambda(x)u(x) + f(x)$	560
35.3	Die Differentialgleichung $u''(x) - u(x) = 0$	564
35.4	Die Differentialgleichung $\sum_{k=0}^n a_k D^k u(x) = 0$	565
35.5	Die Differentialgleichung $\sum_{k=0}^n a_k D^k u(x) = f(x)$	566
35.6	Eulersche Differentialgleichung	567
36	Uneigentliche Integrale	571
36.1	Einleitung	571
36.2	Integrale über unbeschränkte Intervalle	571
36.3	Integrale von unbeschränkten Funktionen	574
37	Reihen	577
37.1	Einleitung	577
37.2	Definition der Konvergenz unendlicher Reihen	578
37.3	Positive Reihen	580
37.4	Absolut konvergente Reihen	582
37.5	Alternierende Reihen	583
37.6	Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert theoretisch!	583
37.7	Abel	585

37.8	Galois	586
38	Skalare autonome Anfangswertprobleme	589
38.1	Einleitung	589
38.2	Eine analytische Lösungsformel	590
38.3	Konstruktion der Lösung	593
39	Separierbare Anfangswertprobleme	597
39.1	Einleitung	597
39.2	Eine analytische Lösungsformel	598
39.3	Räuber-Beute-Modell nach Volterra-Lotka	600
39.4	Eine Verallgemeinerung	601
40	Das allgemeine Anfangswertproblem	605
40.1	Einleitung	605
40.2	Determinismus und Materialismus	607
40.3	Vorhersagbarkeit und Berechenbarkeit	608
40.4	Konstruktion der Lösung	609
40.5	Berechnungsaufwand	611
40.6	Erweiterung auf Anfangswertprobleme zweiter Ordnung	611
40.7	Numerische Methoden	612
41	Werkzeugkoffer: Infinitesimalrechnung I	615
41.1	Einleitung	615
41.2	Rationale Zahlen	615
41.3	Reelle Zahlen, Folgen und Grenzwerte	616
41.4	Polynome und rationale Funktionen	616
41.5	Lipschitz-Stetigkeit	617
41.6	Ableitungen	617
41.7	Ableitungsregeln	618
41.8	Nullstellen von $f(x)$ für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	618
41.9	Integrale	619
41.10	Der Logarithmus	620
41.11	Die Exponentialfunktion	620
41.12	Die trigonometrischen Funktionen	621
41.13	Liste von Stammfunktionen	623
41.14	Reihen	623
41.15	Die Differentialgleichung $\dot{u} + \lambda(x)u(x) = f(x)$	624
41.16	Separierbare skalare Anfangswertprobleme	624
42	Analytische Geometrie in \mathbb{R}^n	625
42.1	Einleitung und Überblick über wichtige Ziele	625
42.2	Body & Soul und künstliche Intelligenz	628
42.3	Die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^n	628

42.4	Das Skalarprodukt und Orthogonalität	629
42.5	Cauchysche Ungleichung	630
42.6	Linearkombinationen einer Menge von Vektoren	631
42.7	Die Einheitsbasis	633
42.8	Lineare Unabhängigkeit	633
42.9	Reduktion einer Menge von Vektoren zu einer Basis	634
42.10	Erzeugen einer Basis durch Spaltenstaffelung	635
42.11	Bestimmung von $B(A)$ durch Spaltenstaffelung	637
42.12	Bestimmung von $N(A)$ durch Zeilenstaffelung	638
42.13	Das Gaussssche Eliminationsverfahren	640
42.14	Eine Basis für \mathbb{R}^n enthält n Vektoren	641
42.15	Koordinaten in verschiedenen Basen	642
42.16	Lineare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	644
42.17	Lineare Abbildungen: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	644
42.18	Matrizen	645
42.19	Matrixberechnungen	645
42.20	Die Transponierte einer linearen Abbildung	648
42.21	Matrixnormen	648
42.22	Die Lipschitz-Konstante einer linearen Abbildung	649
42.23	Das Volumen in \mathbb{R}^n : Determinanten und Permutationen	650
42.24	Definition des Volumens $V(a_1, \dots, a_n)$	651
42.25	Das Volumen $V(a_1, a_2)$ in \mathbb{R}^2	652
42.26	Das Volumen $V(a_1, a_2, a_3)$ in \mathbb{R}^3	653
42.27	Das Volumen $V(a_1, a_2, a_3, a_4)$ in \mathbb{R}^4	653
42.28	Das Volumen $V(a_1, \dots, a_n)$ in \mathbb{R}^n	654
42.29	Die Determinante einer Dreiecksmatrix	654
42.30	Berechnung von $\det A$ mit Hilfe der Spaltenstaffelung	654
42.31	Die Zauberformel $\det AB = \det A \cdot \det B$	655
42.32	Nachprüfen der linearen Unabhängigkeit	655
42.33	Die Cramersche Regel für nicht-singuläre Systeme	656
42.34	Die inverse Matrix	658
42.35	Projektion auf einen Unterraum	659
42.36	Eine äquivalente Charakterisierung der Projektion	660
42.37	Orthogonale Zerlegung: Der Satz von Pythagoras	661
42.38	Eigenschaften von Projektionen	662
42.39	Orthogonalisierung: Das Gram-Schmidt Verfahren	662
42.40	Orthogonale Matrizen	663
42.41	Invarianz des Skalarprodukts unter orthonormalen Abbildungen	664
42.42	Die QR-Zerlegung	664
42.43	Der Fundamentalsatz der linearen Algebra	665
42.44	Basiswechsel: Koordinaten und Matrizen	666
42.45	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	667

43 Der Spektralsatz	671
43.1 Eigenwerte und Eigenvektoren	671
43.2 Basis von Eigenvektoren	673
43.3 Ein einfacher Spektralsatz für symmetrische Matrizen	674
43.4 Anwendung des Spektralsatzes für ein AWP	675
43.5 Der allgemeine Spektralsatz für symmetrische Matrizen	676
43.6 Die Norm einer symmetrischen Matrix	679
43.7 Erweiterung auf nicht-symmetrische reelle Matrizen . .	680
44 Die Lösung linearer Gleichungssysteme	681
44.1 Einleitung	681
44.2 Direkte Methoden	681
44.3 Direkte Methoden für Spezialfälle	689
44.4 Iterative Methoden	692
44.5 Fehlerschätzungen	703
44.6 Die Methode der konjugierten Gradienten	706
44.7 GMRES	708
45 Werkzeugkoffer Lineare Algebra	717
45.1 Lineare Algebra in \mathbb{R}^2	717
45.2 Lineare Algebra in \mathbb{R}^3	718
45.3 Lineare Algebra in \mathbb{R}^n	718
45.4 Lineare Abbildungen und Matrizen	719
45.5 Die Determinante und das Volumen	720
45.6 Die Cramersche Regel	720
45.7 Inverse	721
45.8 Projektionen	721
45.9 Fundamentalsatz der linearen Algebra	721
45.10 QR-Zerlegung	721
45.11 Basiswechsel	722
45.12 Methode der kleinsten Fehlerquadrate	722
45.13 Eigenwerte und Eigenvektoren	722
45.14 Der Spektralsatz	722
45.15 Die Methode der konjugierten Gradienten	722
46 Die Exponentialfunktion für Matrizen $\exp(xA)$	723
46.1 Einleitung	723
46.2 Berechnung von $\exp(xA)$ für diagonalisierbares A . . .	724
46.3 Eigenschaften von $\exp(xA)$	726
46.4 Die Methode von Duhamel	726
47 Lagrange und das Prinzip der kleinsten Wirkung*	729
47.1 Einleitung	729
47.2 Ein Masse-Feder System	731
47.3 Ein Pendel mit fixierter Aufhängung	732

47.4	Ein Pendel mit beweglicher Aufhängung	733
47.5	Das Prinzip der kleinsten Wirkung	734
47.6	Erhalt der Gesamtenergie	735
47.7	Das doppelte Pendel	735
47.8	Das Zwei-Körper Problem	737
47.9	Stabilität der Bewegung eines Pendels	737
48	N-Körper Systeme*	741
48.1	Einleitung	741
48.2	Massen und Federn	742
48.3	Das N -Körper Problem	744
48.4	Massen, Federn und Pralltöpfe: Kleine Auslenkungen	745
48.5	Berücksichtigung von Pralltöpfen	746
48.6	Eine Kuh, die eine Treppe hinunterfällt	748
48.7	Der lineare Oszillator	748
48.8	Gedämpfter linearer Oszillator	749
48.9	Erweiterungen	751
49	Unfallmodellierung*	753
49.1	Einleitung	753
49.2	Das vereinfachte Wachstumsmodell	754
49.3	Das vereinfachte Abnahme-Modell	756
49.4	Das vollständige Modell	757
50	Elektrische Stromkreise*	761
50.1	Einleitung	761
50.2	Schleifen, Widerstände und Kondensatoren	762
50.3	Aufbau von Stromkreisen: Die Kirchhoffschen Gesetze	763
50.4	Wechselseitige Induktion	764
51	Stringtheorie*	767
51.1	Einleitung	767
51.2	Ein lineares System	768
51.3	Ein weiches System	769
51.4	Ein hartes System	769
51.5	Untersuchung der Phasenebene	770
52	Stückweise lineare Näherung	773
52.1	Einleitung	773
52.2	Lineare Interpolation auf $[0, 1]$	774
52.3	Der Raum der stetigen stückweise linearen Funktionen	779
52.4	Die L_2 -Projektion auf V_h	782
53	FEM für Zwei-Punkte Randwertprobleme	787
53.1	Einleitung	787

53.2	Anfangs-Randwertprobleme	790
53.3	Stationäre Randwertprobleme	791
53.4	Die finite Element-Methode	791
53.5	Das diskrete Gleichungssystem	795
53.6	Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen . . .	797
53.7	Fehlerabschätzungen und adaptive Fehlerkontrolle . . .	801
53.8	Diskretisierung von zeitabhängigen Reaktions-Diffusions-Konvektions Problemen	805
53.9	Nicht-lineare Reaktions-Diffusions-Konvektions Probleme	806
References		809
Index		811