

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur dritten Auflage	v
Vorwort zur zweiten Auflage	v
Vorwort zur ersten Auflage	v
0 Vorbemerkungen	1
0.1 Womit befasst sich die Algebra?	1
0.2 Gruppen, Ringe, Körper	2
1 Halbgruppen	5
1.1 Definitionen	5
1.2 Unterhalbgruppen	8
1.3 Invertierbare Elemente	9
1.4 Allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz	11
1.5 Potenzen und Vielfache	11
1.6 Homomorphismen, Isomorphismen	12
1.7 Direkte Produkte	15
2 Gruppen	17
2.1 Eigenschaften und Beispiele von Gruppen	17
2.2 Untergruppen	21
2.3 Homomorphismen	25
3 Untergruppen	29
3.1 Erzeugendensysteme. Elementordnungen	29
3.2 Nebenklassen	35
3.3 Der Satz von Lagrange	38
4 Normalteiler und Faktorgruppen	43
4.1 Normalteiler	43
4.2 Normalisatoren	46
4.3 Faktorgruppen	47
4.4 Der Homomorphiesatz	51
4.5 Innere Automorphismen und das Zentrum einer Gruppe *	53
4.6 Isomorphiesätze	54
5 Zyklische Gruppen	59
5.1 Der Untergruppenverband zyklischer Gruppen	59
5.2 Klassifikation der zyklischen Gruppen	61
5.3 Anwendungen in der Zahlentheorie	62
5.4 Die Automorphismengruppen zyklischer Gruppen *	68
6 Direkte Produkte	71
6.1 Äußere direkte Produkte	71

6.2	Innere direkte Produkte	72
6.3	Anwendung in der Zahlentheorie	75
7	Gruppenoperationen	83
7.1	Bahnen und Stabilisatoren	83
7.2	Der Fixpunktsatz	87
7.3	Die Klassengleichung	89
8	Die Sätze von Sylow	93
8.1	Der erste Satz von Sylow	93
8.2	Der zweite Satz von Sylow	97
8.3	Gruppen kleiner Ordnung	100
9	Symmetrische und alternierende Gruppen	105
9.1	Kanonische Zerlegung in Zyklen	105
9.2	Alternierende Gruppen	109
9.3	Einfache Gruppen	111
10	Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen	115
10.1	Der Hauptsatz	115
10.2	Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen	117
10.3	Die zweite Version des Hauptsatzes *	119
11	Auflösbare Gruppen	121
11.1	Normalreihen und Kompositionsreihen	121
11.2	Kommutatorgruppen	125
11.3	Auflösbare Gruppen	128
11.4	Untergruppen, Faktorgruppen und Produkte auflösbarer Gruppen	129
11.5	Klassen auflösbarer Gruppen	131
12	Freie Gruppen *	133
12.1	Existenz und Eindeutigkeit freier Gruppen	133
12.2	Definierende Relationen	142
12.3	Beispiele	145
13	Grundbegriffe der Ringtheorie	149
13.1	Definition und Beispiele	149
13.2	Teilringe	152
13.3	Die Einheitengruppe	153
13.4	Homomorphismen	154
13.5	Integritätsbereiche	156
13.6	Charakteristik eines Ringes mit 1	157
13.7	Körper und Schiefkörper	158
13.8	Quotientenkörper	160
14	Polynomringe	165

14.1 Motivation	165
14.2 Konstruktion des Ringes $R[\mathbb{N}_0]$	166
14.3 Polynome in einer Unbestimmten	168
14.4 Prime Restklassengruppen *	177
14.5 Polynome in mehreren Unbestimmten	179
15 Ideale	183
15.1 Definitionen und Beispiele	183
15.2 Erzeugung von Idealen	185
15.3 Einfache Ringe	186
15.4 Idealoperationen	188
15.5 Faktorringe	189
15.6 Isomorphiesätze	190
15.7 Primideale	192
15.8 Maximale Ideale	194
16 Teilbarkeit in Integritätsbereichen	199
16.1 Teilbarkeit	199
16.2 Idealtheoretische Interpretation	203
17 Faktorielle Ringe	205
17.1 Kennzeichnungen faktorieller Ringe	205
17.2 Der nichtfaktorielle Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *	208
18 Hauptidealringe. Euklidische Ringe	213
18.1 Hauptidealringe	213
18.2 Euklidische Ringe	215
18.3 Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[i]$ *	218
19 Zerlegbarkeit in Polynomringen und noethersche Ringe	223
19.1 Der Satz von Gauß	223
19.2 Irreduzibilität	227
19.3 Noethersche Ringe *	231
20 Grundlagen der Körpertheorie	235
20.1 Körpererweiterungen	235
20.2 Ring- und Körperadjunktion	241
20.3 Algebraische Elemente. Minimalpolynome	242
21 Einfache und algebraische Körpererweiterungen	247
21.1 Einfache Körpererweiterungen	247
21.2 Fortsetzung von Isomorphismen auf einfache Erweiterungen	249
21.3 Algebraische Körpererweiterungen	251
22 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal *	257
22.1 Konstruierbarkeit	257

22.2 Die drei klassischen Probleme	263
23 Transzendente Körpererweiterungen *	265
23.1 Transzendenzbasen	265
23.2 Der Transzendenzgrad	269
24 Algebraischer Abschluss. Zerfällungskörper	271
24.1 Der algebraische Abschluss eines Körpers	272
24.2 Zerfällungskörper	277
24.3 Normale Körpererweiterungen	282
25 Separable Körpererweiterungen	287
25.1 Ableitung. Mehrfache Wurzeln	287
25.2 Separabilität	289
25.3 Vollkommene Körper	292
25.4 Der Satz vom primitiven Element	293
25.5 Der separable Abschluss	295
26 Endliche Körper	301
26.1 Existenz und Eindeutigkeit	301
26.2 Der Verband der Teilkörper	304
26.3 Automorphismen	305
27 Die Galois Korrespondenz	307
27.1 K -Automorphismen	307
27.2 Die allgemeine Galois Korrespondenz	311
27.3 Algebraische Galois Erweiterungen	315
27.4 Hauptsatz der endlichen Galois Theorie	317
27.5 Ergänzungen	320
28 Der Zwischenkörperverband einer Galois Erweiterung *	325
28.1 Norm und Spur	325
28.2 Hinweise zur Ermittlung des Fixkörpers $\mathcal{F}(\Delta)$	326
28.3 Hinweise zur Ermittlung von $\Gamma = \Gamma(L/K)$	328
28.4 Beispiele	329
28.5 Die Galoisgruppe eines Polynoms	330
29 Kreisteilungskörper	335
29.1 Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper	335
29.2 Kreisteilungspolynome	337
29.3 Die Galoisgruppe von K_n/K	342
29.4 Konstruktion regulärer Vielecke *	344
30 Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale	349
30.1 Zyklische Körpererweiterungen	349
30.2 Auflösbarkeit	354

30.3 Das Auflösbarkeitskriterium 354

31 Die allgemeine Gleichung 359

31.1 Symmetrische Funktionen 359

31.2 Das allgemeine Polynom 362

31.3 Die Diskriminante eines Polynoms * 364

31.4 Die allgemeine Gleichung vom Grad 3 * 366

31.5 Die allgemeine Gleichung vom Grad 4 * 369

A Hilfsmittel 371

A.1 Äquivalenzrelationen 371

A.2 Transfinite Beweismethoden 372

A.3 Kardinalzahlen 375

A.4 Zusammenfassung der Axiome 377

Literaturverzeichnis 379

Index 381