

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1	
1	Affine Inzidenzebenen	7
1.1	Definition affiner Inzidenzebenen	7
1.2	Einfache Folgerungen	9
1.3	Kollineationen	12
1.4	Punktabbildung einer Kollineation	14
1.5	Dilatationen	15
1.6	Schließungssätze	17
1.6.1	Der große und der kleine Satz von DESARGUES	17
1.6.2	Der große und der kleine Satz von PAPPOS	20
1.6.3	Der Schließungssatz (D^*)	21
1.6.4	Der große und der kleine Scherensatz	23
1.6.5	Zusammenhänge zwischen den Schließungssätzen	24
1.6.6	(D)-Ebenen u. ä.	25
2	Parallelverschiebungen in (d)-Ebenen	27
2.1	Definition von Parallelogrammen	27
2.2	Zur Definition uneigentlicher Parallelogramme	31
2.3	Eigenschaften von Parallelogrammen	32
2.4	Definition von Parallelverschiebungen	36
2.5	Einige Eigenschaften der Parallelverschiebungen	38
2.6	Die abelsche Gruppe der Parallelverschiebungen	39
2.7	Parallelverschiebungen respektieren die Kollinearität	41
2.8	Parallelverschiebungen als Kollineationen	42
2.9	Parallelverschiebungen als Dilatationen	43
2.10	Fixpunkte, Fixgeraden, Spuren, Richtung von Parallelverschiebungen ..	43
2.11	Die Untergruppen T_g von T	44
2.12	Zusammenhang zwischen T und \mathcal{P} , sowie zwischen T_g und \mathcal{P}_g	45

2.13	Konjugationen in Gruppen	46
2.14	Konjugation von Parallelverschiebungen mit Kollineationen	47
2.15	Algebraische Struktur der Gruppe (T, \circ)	48
2.16	Zusammenhang zwischen Parallelverschiebungen und Translationen	49
2.17	Operieren der Translationsgruppe T auf der Punktmenge \mathcal{P}	52
	Ergänzungen zu Kapitel 2	57
2.18	Parallelgleichheit; Vektoren als Äquivalenzklassen.....	57
2.19	Ortsvektoren	58
2.20	Ein geometrischer Beweis von Eigenschaft 2.5 (2)	59
3	Streckungen in (D)-Ebenen	61
3.1	Definition von Z -Trapezen	62
3.2	Zur Definition von uneigentlichen Z -Trapezen.....	64
3.3	Eigenschaften von Z -Trapezen	65
3.4	Definition von Streckungen	68
3.5	Einige Eigenschaften der Streckungen	70
3.6	Die Gruppe der Streckungen mit Zentrum Z	71
3.7	Streckungen erhalten die Kollinearität	74
3.8	Streckungen als Kollineationen.....	75
3.9	Streckungen als Dilatationen.....	75
3.10	Fixpunkte, Fixgeraden, Spuren von Streckungen	76
3.11	Zusammenhang in (D)-Ebenen zwischen der Menge aller Z -Streckungen und der Menge aller Punkte einer Geraden durch Z	76
3.12	Konjugation von Streckungen mit Kollineationen.....	78
3.13	Isomorphie aller Streckungsgruppen.....	78
3.14	Konjugation von Parallelverschiebungen mit Streckungen.....	79
3.15	Zusammenhang zwischen Streckungen und Dilatationen mit einem Fixpunkt	80
3.16	Die Streckungsgruppe mit Zentrum Z operiert in (D)-Ebenen auf jeder Geraden durch Z	82
	Ergänzungen zu Kapitel 3	85
3.17	Z -Streckungsgleichheit	85
3.18	Ein geometrischer Beweis von Satz 3.14	86

3.19	(D) ist eine notwendige Voraussetzung für Satz 3.11	88
4	Schiefkörper der spurtreuen Endomorphismen von T	91
4.1	Zwei Ergebnisse aus der Linearen Algebra.....	93
4.1.1	Der Endomorphismenring einer abelschen Gruppe.....	93
4.1.2	Abelsche Gruppen als Linksmoduln über ihrem Endomorphismenring ..	93
4.2	Anwendung auf die abelsche Gruppe (T, o) der Parallelverschiebungen ..	94
4.3	Spurtreue Endomorphismen von (T, o)	97
4.4	Geometrische Verhältnisse bei der Anwendung spurtreuer Endomorphismen von (T, o) in (d)-Ebenen	99
4.5	Spurtreue Endomorphismen von (T, o) in (D)-Ebenen	101
4.6	Der Gruppenhomomorphismus $\text{konj} : \text{Dil}(A) \rightarrow \text{Aut}(T, o)$	105
4.7	Der Schiefkörper K der spurtreuen Endomorphismen von (T, o) in (D)-Ebenen	107
4.8	Der einer (D)-Ebene zugeordnete Linksvektorraum $_K T$	112
	Ergänzungen zu Kapitel 4	113
4.9	Eigenschaften der von \mathcal{O} verschiedenen spurtreuen Endomorphismen in (d)-Ebenen	113
4.10	Der Schiefkörper K der spurtreuen Endomorphismen in (d)-Ebenen	118
4.11	Algebraischer Beweis der Injektivität der von \mathcal{O} verschiedenen spurtreuen Endomorphismen in (d)-Ebenen	122
4.12	Algebraischer Beweis der Surjektivität der von \mathcal{O} verschiedenen spurtreuen Endomorphismen in (d)-Ebenen	122
4.13	Algebraischer Beweis von $K = \text{Konj}_{\mathcal{S}_o} \cup \{\mathcal{O}\}$ in (D)-Ebenen	123
5	Beziehungen zwischen (D)-Ebenen und algebraisch affinen Ebenen	127
5.1	Algebraisch affine Ebenen	127
5.1.1	Algebraische affine Räume und Ebenen	128
5.1.2	Affine Standardräume	130
5.1.3	Unterräume eines algebraisch affinen Raumes	130
5.1.4	Einige Eigenschaften affiner Unterräume	133
5.1.5	Semi-Affinitäten und Affinitäten zwischen affinen Räumen	134
5.2	Die einer algebraisch affinen Ebene A kanonisch zugeordnete (D)-Ebene $G(A)$	140
5.3	Die einer (D)-Ebene A kanonisch zugeordnete algebraisch affine Ebene $F(A)$	143

5.4	Kollineationen zwischen (D)-Ebenen induzieren Semi-Affinitäten zwischen den kanonisch zugeordneten algebraisch affinen Ebenen	144
5.5	Semi-Affinitäten zwischen algebraisch affinen Ebenen induzieren Kollineationen zwischen den kanonisch zugeordneten (D)-Ebenen	150
5.6	Das Kompositum $G \circ F$ der kanonischen Zuordnungen liefert eine Kollineation $\mathbf{A} \mapsto G \circ F(\mathbf{A})$ von (D)-Ebenen	152
5.7	Das Kompositum $F \circ G$ der kanonischen Zuordnungen liefert eine Semi-Affinität $\mathcal{A} \mapsto F \circ G(\mathcal{A})$ algebraisch affiner Ebenen	153
5.7.1	Bezeichnungen	153
5.7.2	Bestimmung von $T(G(\mathcal{A}))$	154
5.7.3	Bestimmung der Untergruppen $T_{\tilde{g}}$ von $T(G(\mathcal{A}))$	156
5.7.4	Bestimmung des Schiefkörpers $K(G(\mathcal{A}))$	156
5.7.5	Streckungen mit Zentrum O in $G(\mathcal{A})$	159
5.7.6	Semi-Affinität von \mathcal{A} auf $F(G(\mathcal{A}))$	159
5.7.7	Ergebnis	160
5.8	Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen von (D)-Ebenen und der Menge der Isomorphieklassen von algebraisch affinen Ebenen ..	161
5.9	Der Hauptsatz der affinen Geometrie und sein Analogon	162
5.10	Koordinaten in (D)-Ebenen	164
	Ergänzungen zu Kapitel 5	167
5.11	Ist der Grundkörper von \mathcal{A} kommutativ, so gilt in $G(\mathcal{A})$ der große Satz von PAPPOS	167
6	Affine Kollineationen, insbesondere axiale Kollineationen in (D)-Ebenen; Affinitäten und Achsenaffinitäten in algebraisch affinen Ebenen	169
6.1	Affine Kollineationen in (D)-Ebenen	170
6.2	(Π_g, a) -Vierecke	172
6.3	Eigenschaften von (Π_g, a) -Vierecken	176
6.4	Zur Definition uneigentlicher (Π_g, a) -Vierecke	181
6.5	(Π_g, a) -Abbildungen	182
6.6	(Π_g, a) -Abbildungen induzieren Kollineationen	186
6.7	Eigenschaften der (Π_g, a) -Kollineationen	190
6.8	Axiale Kollineationen	192
6.9	Äquivalenz von (Π_g, a) -Kollineationen und axialen Kollineationen ..	192
6.10	Fundamentalsatz der affinen Geometrie in (D)-Ebenen	196
6.11	Komposition axialer Kollineationen mit gleicher Achse	198

Ergänzungen zu Kapitel 6	201
6.12 (Π_g, a) -Äquivalenz	201
6.13 Axiale Kollineationen und Achsenaffinitäten	202
6.14 Algebraische Beschreibung, insbesondere Matrizendarstellung von Achsenaffinitäten.....	203
6.14.1 Algebraische Beschreibung von Achsenaffinitäten.....	203
6.14.2 Matrizendarstellung von Scherungen	204
6.14.3 Matrizendarstellung von Achsenaffinitäten, die keine Scherungen sind ..	205
7 Hilbertsche Streckenrechnung in (D)-Ebenen	207
7.1 Einleitung	207
7.2 Wiederholung aus der Algebra	208
7.3 Der Schiefkörper der HILBERTSchen Streckenrechnung	209
7.4 Geometrische Konstruktion der Addition von Strecken	214
7.5 Geometrische Konstruktion der Multiplikation von Strecken	216
7.6 Koordinaten bei der HILBERTSchen Streckenrechnung	218
7.7 Kennzeichnung der Geraden als lineare Mannigfaltigkeiten	219
7.8 Zusammenhang zwischen den Koordinaten gemäß der HILBERTSchen Streckenrechnung und unseren Koordinaten	227
Anhang	231
8 Teilverhältnis und Proportionen in (D)-Ebenen	233
8.1 Definition und Eigenschaften des Teilverhältnisses	233
8.2 Strahlensätze	235
8.3 Teilverhältnis bei affinen Kollineationen und bei Parallelprojektionen ..	237
8.4 Proportionen in der HILBERTSchen Streckenrechnung	239
9 Beweise der verwendeten Zusammenhänge zwischen den Schließungssätzen	241
9.1 Aus (D) folgt (d)	242
9.2 Aus (d) folgt (p)	245
9.3 Aus (p) folgt (s).....	249
9.4 Aus (P) folgt (D).....	252
9.5 Aus (D) folgt (D*)	266

9.6	Aus (D) folgt (S)	274
10	Konstruktive Definition von Zentralkollineationen in projektiven (D)-Ebenen	281
10.1	Projektive Ebenen	283
10.2	Zusammenhang zwischen projektiven und affinen Ebenen	285
10.3	Der Satz von DESARGUES in projektiven Ebenen	287
10.3.1	Der Satz von DESARGUES in projektiven Ebenen	287
10.3.2	Zusammenhang der beiden affinen Schließungssätze (D) und (D*)	289
10.3.3	Zusammenhang zwischen (D_{aff}) und (D_{proj})	290
10.3.4	Allgemeinere Formulierung von (D_{proj})	291
10.4	(Z, a)-Vierecke	291
10.5	Eigenschaften von (Z, a)-Vierecken	295
10.6	Zur Definition uneigentlicher (Z, a)-Vierecke	297
10.7	(Z, a)-Punktabbildungn	298
10.8	(Z, a)-Punktabbildungn induzieren Kollineationen	303
10.9	Zentralkollineationen in projektiven Ebenen	305
10.10	Äquivalenz der axiomatischen Definition von Zentralkollineationen und der konstruktiven Definition von (Z, a)-Kollineationen in projektiven (D)-Ebenen	309
10.11	Beziehungen der (Z, a)-Kollineationen zu den in den Kapiteln 2, 3 und 6 definierten affinen Kollineationen	311
	Ergänzungen zu Kapitel 10	313
10.12	(Z, a)-Äquivalenz	313
10.13	Komposition zentraler Kollineationen mit derselben Achse, aber verschiedenen Zentren	313
10.14	Äquivalenz des Schließungssatzes $D(Z, a)$ mit der linearen Transitivität der Gruppe $\mathcal{Z}(Z, a)$	318
10.15	Anmerkungen zur Gruppe $\mathcal{T}(a)$	321
	Literaturverzeichnis	323
	Bezeichnungen	325
	Index	329