

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Grundlagen	1
1.1 Mengenlehre	1
1.1.1 Mengenbegriff	2
1.1.2 Mengenoperationen	4
1.1.3 Abbildungen	7
1.2 Logik	12
1.2.1 Aussagenlogik	12
1.2.2 Prädikatenlogik	18
1.2.3 Beweise	23
1.3 Reelle Zahlen	25
1.3.1 Natürliche und ganze Zahlen	25
1.3.2 Rationale Zahlen	34
1.3.3 Reelle Zahlen	43
1.4 Rechnen mit reellen Zahlen	54
1.4.1 Potenzen und Wurzeln	54
1.4.2 Summen und Produkte, Binomischer Lehrsatz	56
1.4.3 Beträge und Ungleichungen	64
1.4.4 Über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	70
1.5 Reelle Funktionen	77
1.5.1 Notation reeller Funktionen	77
1.5.2 Eigenschaften von reellen Funktionen	80
1.5.3 Umkehrfunktion	84
1.5.4 Verkettung von Funktionen	86
1.5.5 Signum- und Betragsfunktion	88
1.5.6 Polynome und gebrochen-rationale Funktionen	89
1.5.7 Potenz- und Wurfelfunktionen	100
1.5.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen	101
1.5.9 Trigonometrische Funktionen	111
1.5.10 Hyperbel- und Areafunktionen	127
1.6 Komplexe Zahlen	130
1.6.1 Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit	131
1.6.2 Komplexe Arithmetik	132
1.6.3 Die Gauß'sche Zahlenebene	134
1.6.4 Euler'sche Gleichung und Polarform komplexer Zahlen	137
1.6.5 Komplexe Wechselstromrechnung*	143
1.6.6 Fundamentalsatz der Algebra	146
1.7 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	151

1.7.1	Lineare Gleichungssysteme	151
1.7.2	Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren	153
1.7.3	Lösen linearer Gleichungssysteme	160
1.7.4	Inverse Matrix und transponierte Matrix	167
1.7.5	Symmetrische und orthogonale Matrizen	172
1.7.6	Dreiecksmatrizen, Bandmatrizen und LR-Zerlegung*	175
1.8	Determinanten	179
1.8.1	Definition und elementare Eigenschaften von Determinanten	179
1.8.2	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	187
1.9	Aufgaben	191
2	Differenzial- und Integralrechnung	203
2.1	Folgen	203
2.1.1	Definition und Grundbegriffe von Folgen	204
2.1.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	208
2.1.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	212
2.1.4	Konvergenzkriterien	215
2.1.5	Die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von Folgen	218
2.1.6	Approximation reeller Potenzen	220
2.1.7	Bestimmte Divergenz	221
2.1.8	Häufungspunkte einer Folge*	224
2.1.9	Folgenkompaktheit und Cauchy-Folgen*	224
2.2	Zahlen-Reihen	228
2.2.1	Definition und Konvergenz einer Reihe	229
2.2.2	Rechnen mit konvergenten Reihen	232
2.2.3	Alternativen zur Definition der Reihenkonvergenz	233
2.2.4	Absolute Konvergenz	235
2.2.5	Konvergenzkriterien für Reihen	237
2.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	247
2.3.1	Umgebungen und Überdeckungen	247
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen	249
2.3.3	Stetigkeit	262
2.3.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	268
2.3.5	Unstetigkeitsstellen	275
2.4	Differenzierbarkeit und Ableitungen	278
2.4.1	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	278
2.4.2	Ableitungsregeln	285
2.4.3	Newton-Verfahren	293
2.4.4	Das Differenzial	295
2.4.5	Höhere Ableitungen	298
2.5	Zentrale Sätze der Differenzialrechnung	300

2.5.1	Satz von Fermat: notwendige Bedingung für lokale Extrema.....	300
2.5.2	Mittelwertsätze der Differenzialrechnung	300
2.5.3	Regeln von L'Hospital.....	306
2.6	Integralrechnung	312
2.6.1	Definition des Integrals.....	313
2.6.2	Eigenschaften des Integrals	318
2.6.3	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	323
2.6.4	Rechenregeln zur Integration.....	326
2.6.5	Numerische Integration.....	343
2.6.6	Uneigentliche Integrale	345
2.6.7	Volumen und Flächen	353
2.7	Satz von Taylor, Kurvendiskussion und Extremalprobleme.....	356
2.7.1	Taylor-Summen	356
2.7.2	Kurvendiskussion und Extremalprobleme	361
2.8	Potenzreihen	372
2.8.1	Unendliche Taylor-Summen und Potenzreihen	372
2.8.2	Einschub: Funktionenfolgen *	376
2.8.3	Konvergenz von Potenzreihen	385
2.8.4	Differenziation und Integration von Potenzreihen	389
2.8.5	Der Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylor-Reihen ...	391
2.8.6	Die komplexe Exponentialfunktion	392
2.9	Aufgaben	394
3	Lineare Algebra	401
3.1	Vektoren in der Ebene und im Raum	401
3.1.1	Vektoren: Grundbegriffe und elementare Rechenregeln.....	401
3.1.2	Skalarprodukt und Orthogonalität	409
3.1.3	Vektorprodukt und Spatprodukt	415
3.1.4	Anwendungen des Skalar-, Vektor- und Spatprodukts	420
3.2	Analytische Geometrie	423
3.2.1	Geraden in der Ebene und im Raum	423
3.2.2	Ebenen im Raum	430
3.3	Vektorräume	437
3.3.1	Definition des Vektorraums	437
3.3.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	444
3.3.3	Skalarprodukt und Norm	453
3.3.4	Orthogonalität, Orthogonal- und Orthonormalsysteme	459
3.4	Lineare Abbildungen	470
3.4.1	Lineare Abbildungen und Matrizen	470
3.4.2	Summe, skalares Vielfaches und Verkettung linearer Abbildungen ..	475
3.4.3	Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz	478

3.4.4	Umkehrabbildung und inverse Matrix	485
3.4.5	Koordinaten- und Basistransformationen *	487
3.5	Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	490
3.5.1	Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems	490
3.5.2	Berechnung von linearen elektrischen Netzwerken *	494
3.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	503
3.6.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	503
3.6.2	Diagonalisierung von Matrizen *	513
3.6.3	Hauptvektoren und Jordan-Normalform *	517
3.7	Aufgaben	521
4	Funktionen mit mehreren Variablen	525
4.1	Grenzwerte und Stetigkeit	528
4.2	Ableitungen von reellwertigen Funktionen mit mehreren Variablen	532
4.2.1	Ableitungsbegriffe	532
4.2.2	Höhere Ableitungen	545
4.2.3	Fehlerrechnung *	548
4.3	Extremwertrechnung	552
4.3.1	Lokale und globale Extrema	552
4.3.2	Extrema unter Nebenbedingungen *	558
4.4	Integralrechnung mit mehreren Variablen	565
4.4.1	Integration über mehrdimensionale Intervalle	565
4.4.2	Integration über Normalbereiche	572
4.4.3	Substitutionsregel	576
4.4.4	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	578
4.5	Vektoranalysis	583
4.5.1	Vektorfelder	583
4.5.2	Kurven	584
4.5.3	Quellen, Senken und Wirbel in Vektorfeldern	587
4.5.4	Kurvenintegrale	589
4.5.5	Satz von Green *	597
4.5.6	Flächenintegrale *	599
4.5.7	Die Sätze von Gauß und Stokes *	603
4.6	Aufgaben	610
5	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	613
5.1	Einführung	613
5.1.1	Beispiele für Differenzialgleichungen aus Physik und Technik	614
5.1.2	Grundbegriffe	618
5.1.3	Konstruktion einer Lösung, Existenz und Eindeutigkeit	623
5.1.4	Iterationsverfahren von Picard und Lindelöf	626
5.2	Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen erster Ordnung	629

5.2.1	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	630
5.2.2	Nicht-lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	642
5.3	Lineare Differenzialgleichungssysteme	655
5.3.1	Motivation: Eine Schaltung mit Induktivitäten	655
5.3.2	Grundbegriffe	656
5.3.3	Homogene Lösungen	659
5.3.4	Partikuläre Lösungen	664
5.3.5	Komplexe und mehrfache Eigenwerte *	669
5.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	677
5.4.1	Lösung über ein lineares Differenzialgleichungssystem	677
5.4.2	Lösung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite	683
5.4.3	Schwingungsgleichung *	688
5.4.4	Eine schwingende Saite: Wellengleichung	694
5.5	Aufgaben	696
6	Fourier-Reihen und Integraltransformationen	699
6.1	Fourier-Reihen	700
6.1.1	Fourier-Koeffizienten und Definition der Fourier-Reihe	701
6.1.2	Sinus- und Kosinus-Form der Fourier-Reihe	707
6.1.3	Komplexwertige Funktionen und Fourier-Koeffizienten	709
6.1.4	Faltung	716
6.1.5	Konvergenz von Fourier-Reihen *	724
6.1.6	Gibbs-Phänomen	734
6.1.7	Entwicklung 2p-periodischer Funktionen	739
6.2	Fourier-Transformation	740
6.2.1	Fourier-Integral	740
6.2.2	Fourier-Umkehrtransformation	744
6.2.3	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Transformation	746
6.2.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	748
6.2.5	Faltung	753
6.3	Laplace-Transformation	758
6.3.1	Von der Fourier- zur Laplace-Transformation	758
6.3.2	Rechnen mit der Laplace-Transformation	762
6.3.3	Laplace-Transformation in der Systemtheorie *	773
6.4	Diskrete Fourier-Transformation	782
6.4.1	Ausgangspunkt: Koeffizienten einer Fourier-Reihe	785
6.4.2	Diskrete Fourier-Transformation	787
6.4.3	Diskrete Faltung *	796
6.4.4	FFT-Algorithmus	800
6.4.5	Numerische Berechnung von Fourier-Koeffizienten	805
6.4.6	Abtastatz für trigonometrische Polynome	807

6.4.7	Leck-Effekt (Leakage) *	814
6.4.8	Numerische Berechnung der Fourier-Transformation	815
6.4.9	Abtastatz der Fourier-Transformation	817
6.4.10	Leck-Effekt und Fensterfunktionen *	826
6.4.11	Zusammenfassung	828
6.5	Aufgaben	829
7	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	833
7.1	Beschreibende Statistik	834
7.1.1	Grundbegriffe	834
7.1.2	Empirische Verteilungsfunktionen	839
7.1.3	Lageparameter	841
7.1.4	Streuungsparameter	846
7.1.5	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen und Korrelation	848
7.1.6	Lineare Regressionsrechnung	852
7.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	857
7.2.1	Zufallsexperimente und Ereignisse	857
7.2.2	Wahrscheinlichkeit und Satz von Laplace	859
7.2.3	Kombinatorik	863
7.2.4	Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten	868
7.2.5	Zufallsvariablen	876
7.2.6	Lage- und Streuungsparameter von Zufallsvariablen	888
7.2.7	Gesetz der großen Zahlen	898
7.2.8	Zentraler Grenzwertsatz	902
7.3	Schließende Statistik	909
7.3.1	Punktschätzungen	910
7.3.2	Begriffe der Fehlerrechnung *	914
7.3.3	Intervallschätzungen	916
7.3.4	Hypothesentests	924
7.4	Aufgaben	929
	Literaturverzeichnis	935
	Index	939