Inhaltsverzeichnis

1 **Einleitung** . . . 1
1.1 Warum die Mathematik für die Philosophie interessant ist . . . 1
1.2 Hilbert, Mathematik und Philosophie . . . 10
1.3 Ausgangspunkte, Ziele und Programm der Arbeit . . . 22
1.4 Methodische Bemerkungen . . . 25

Teil I Zur Konzeption des Hilbertprogramms

2 **Das Hilbertprogramm und seine Ziele** . . . 33

3 **Wurzeln: Axiomatik** . . . 39
3.1 Geometrie als Paradigma der traditionellen Axiomatik . . . 40
3.2 Hilberts neue Axiomatik und die Grundlagen der Geometrie . . . 47
3.3 Axiome als implizite Definitionen . . . 53
3.4 Axiomatik als Metawissenschaft? . . . 56
3.5 Kriteriologie für Axiome . . . 60
3.6 Ziele und denkerische Verortung der Axiomatik . . . 72
3.7 Zusammenfassung . . . 74

4 **Kontext: Logizismus und Intuitionismus** . . . 75
4.1 Logizismus . . . 76
4.2 Intuitionismus . . . 101
4.3 Zusammenfassung . . . 112

5 **Formalismus** . . . 115
5.1 Formelspiel vs. methodische Einstellung . . . 116
5.2 Alternative Formalismusbegriffe . . . 120
5.3 Hilberts Formalismus . . . 122
5.4 Widerspruchsfreiheit, Wahrheit und Existenz . . . 126
5.5 Zusammenfassung . . . 133

6 Finitismus . . . 135
6.1 Erste begrifflich-inhaltliche Abgrenzungen . . . 136
6.2 Finite Zahlentheorie . . . 139
6.3 Finite Metamathematik . . . 145
6.4 Formale Abgrenzung . . . 149
6.5 Zusammenfassung . . . 153

7 Die Methode der idealen Elemente . . . 155
7.1 Ideale Elemente in der Mathematik des 19. Jahrhunderts . . . 156
7.2 Analogiemißbrauch . . . 160
7.3 Hilberts ideale Elemente . . . 162
7.4 Zusammenfassung . . . 166

8 Instrumentalismus . . . 169
8.1 Der Instrumentalismus und die instrumentalistische Auffassung des Hilbertprogramms . . . 169
8.2 Kritik der instrumentalistischen Interpretation von Hilberts Programm . 171
8.3 Zusammenfassung . . . 180

Teil II Zur Durchführung des Hilbertprogramms

9 Hilberts Widerspruchsfreiheitsbeweise . . . 183
9.1 Hilbert und Bernays . . . 183
9.2 Reduktion durch Angabe eines Modells . . . 184
9.3 Erste syntaktische Überlegungen: Heidelberg 1904 . . . 190
9.4 Wiederaufnahme und Weiterentwicklung: Vorlesungen 1917–1920 . . . 194
9.5 Übergänge und neue Techniken . . . 198
9.6 Hilbertsche Beweistheorie . . . 207
9.7 Zusammenfassung . . . 222

10 Hilbertschule I: Wilhelm Ackermann . . . 225
10.1 Ackermanns Ziele . . . 226
10.2 Das formale System . . . 228
10.3 Analyse des Beweises . . . 233
10.4 Deutung, Diskussion und Kritik . . . 245
10.5 Zusammenfassung . . . 248

11 Intuitionistische und Klassische Zahlentheorie: HA und PA . . . 251
11.1 Das Resultat . . . 251
11.2 Die Deutung . . . 252

12 Hilbertschule II: Gerhard Gentzen . . . 255
12.1 Logische Kalküle, Hauptsatz und Widerspruchsfreiheit der induktionsfreien Zahlentheorie . . . 256
12.2 Der erste, nicht veröffentlichte Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie . . . 265
12.3 Der erste veröffentlichte Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie . . . 277
12.4 Beweisbarkeit der transfiniten Induktion und Ordinalzahlanalyse . . . 280
12.5 Zusammenfassung . . . 282

Teil III Zur Reflexion des Hilbertprogramms

13 Der Problemkreis „Poincaré" . . . 285
13.1 Das *Petitio-principii*-Problem mit der Induktion . . . 286
13.2 Das *Circulus-vitiosus*-Problem mit den imprädikativen Definitionen . . . 298
13.3 Zusammenfassung . . . 304

14 Der Problemkreis „Gödel" . . . 307
14.1 Meinungsvielfalt . . . 308
14.2 Die Reichweite der Gödelschen Sätze . . . 313
14.3 HP gegen Gödel, oder: das Formalisierbarkeitsproblem . . . 317
14.4 Gödel-2 gegen HP . . . 321
14.5 Gödel-1 gegen HP . . . 326
14.6 Das HP als Konservativitätsprogramm? . . . 328
14.7 Zusammenfassung . . . 337

15 Der Problemkreis „Kreisel" . . . 339
15.1 Was Ordinalzahlen sind . . . 339
15.2 Wofür Ordinalzahlen in der Beweistheorie verwendet werden . . . 346
15.3 Zusammenfassung . . . 352

16 Resümee . . . 353
16.1 Hilberts Ziele und Strategien . . . 353
16.2 Aufklärung über das Unendliche . . . 354
16.3 Reduktionismus . . . 357
16.4 Ist Hilberts Programm denn nun gescheitert? – Versuch einer Antwort . . . 359

Literatur . . . 363