

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Maßtheorie	1
1.1	Mengensysteme	1
1.2	Mengenfunktionen	12
1.3	Fortsetzung von Maßen	18
1.4	Messbare Abbildungen	34
1.5	Zufallsvariablen	43
2	Unabhängigkeit	49
2.1	Unabhängigkeit von Ereignissen	49
2.2	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	56
2.3	Kolmogorov'sches 0-1 Gesetz	63
2.4	Beispiel: Perkolation	67
3	Erzeugendenfunktion	79
3.1	Definition und Beispiele	79
3.2	Poisson-Approximation	82
3.3	Verzweigungsprozesse	84
4	Das Integral	87
4.1	Konstruktion und einfache Eigenschaften	87
4.2	Monotone Konvergenz und Lemma von Fatou	95
4.3	Lebesgue-Integral versus Riemann-Integral	98
5	Momente und Gesetze der Großen Zahl	103
5.1	Momente	103
5.2	Schwaches Gesetz der Großen Zahl	110

5.3	Starkes Gesetz der Großen Zahl	113
5.4	Konvergenzrate im starken GGZ	122
5.5	Der Poissonprozess	125
6	Konvergenzsätze	133
6.1	Fast-überall- und stochastische Konvergenz	133
6.2	Gleichgradige Integrierbarkeit	138
6.3	Vertauschung von Integral und Ableitung	145
7	L^p-Räume und Satz von Radon-Nikodym	147
7.1	Definitionen	147
7.2	Ungleichungen und Satz von Fischer-Riesz	149
7.3	Hilberträume	155
7.4	Lebesgue'scher Zerlegungssatz	158
7.5	Ergänzung: Signierte Maße	162
7.6	Ergänzung: Dualräume	169
8	Bedingte Erwartungen	173
8.1	Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten	173
8.2	Bedingte Erwartungen	177
8.3	Reguläre Version der bedingten Verteilung	184
9	Martingale	193
9.1	Prozesse, Filtrationen, Stoppzeiten	193
9.2	Martingale	198
9.3	Diskretes stochastisches Integral	202
9.4	Diskreter Martingaldarstellungssatz und CRR Modell	204
10	Optional Sampling Sätze	209
10.1	Doob-Zerlegung und quadratische Variation	209
10.2	Optional Sampling und Optional Stopping	213
10.3	Gleichgradige Integrierbarkeit und Optional Sampling	217
11	Martingalkonvergenzsätze und Anwendungen	221

11.1	Die Doob'sche Ungleichung	221
11.2	Martingalkonvergenzsätze	223
11.3	Beispiel: Verzweigungsprozess	233
12	Rückwärtsmartingale und Austauschbarkeit	235
12.1	Austauschbare Familien von Zufallsvariablen	235
12.2	Rückwärtsmartingale	240
12.3	Satz von de Finetti	243
13	Konvergenz von Maßen	249
13.1	Wiederholung Topologie	249
13.2	Schwache und vage Konvergenz	256
13.3	Der Satz von Prohorov	265
13.4	Anwendung: Satz von de Finetti – anders angeschaut	275
14	W-Maße auf Produkträumen	279
14.1	Produkträume	280
14.2	Endliche Produkte und Übergangskerne	283
14.3	Satz von Ionescu-Tulcea und Projektive Familien	292
14.4	Markov'sche Halbgruppen	297
15	Charakteristische Funktion und Zentraler Grenzwertsatz	301
15.1	Trennende Funktionenklassen	301
15.2	Charakteristische Funktionen: Beispiele	308
15.3	Der Lévy'sche Stetigkeitssatz	315
15.4	Charakteristische Funktion und Momente	320
15.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	326
15.6	Mehrdimensionaler Zentraler Grenzwertsatz	334
16	Unbegrenzt teilbare Verteilungen	337
16.1	Die Lévy-Khinchin Formel	337
16.2	Stabile Verteilungen	349
17	Markovketten	357

XII Inhaltsverzeichnis

17.1 Begriffsbildung und Konstruktion	357
17.2 Diskrete Markovketten, Beispiele	364
17.3 Diskrete Markovprozesse in stetiger Zeit	368
17.4 Diskrete Markovketten, Rekurrenz und Transienz	373
17.5 Anwendung: Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten	377
17.6 Invariante Verteilungen	384
17.7 Anwendung: Stochastische Ordnung und Kopplung	390
18 Konvergenz von Markovketten	397
18.1 Periodizität von Markovketten	397
18.2 Kopplung und Konvergenzsatz	401
18.3 Markovketten Monte Carlo Methode	406
18.4 Konvergenzgeschwindigkeit	413
19 Markovketten und elektrische Netzwerke	419
19.1 Harmonische Funktionen	419
19.2 Reversible Markovketten	423
19.3 Endliche Elektrische Netzwerke	424
19.4 Rekurrenz und Transienz	430
19.5 Netzwerkreduktion	436
19.6 Irrfahrt in zufälliger Umgebung	445
20 Ergodentheorie	449
20.1 Begriffsbildung	449
20.2 Ergodensätze	453
20.3 Beispiele	455
20.4 Anwendung: Rekurrenz von Irrfahrten	457
20.5 Mischung	460
20.6 Entropie	463
21 Die Brown'sche Bewegung	467
21.1 Stetige Modifikationen	467
21.2 Konstruktion und Pfadeigenschaften	474

21.3 Starke Markoveigenschaft	479
21.4 Ergänzung: Feller Prozesse	482
21.5 Konstruktion durch L^2 -Approximation	485
21.6 Der Raum $C([0, \infty))$	492
21.7 Konvergenz von W-Maßen auf $C([0, \infty))$	494
21.8 Satz von Donsker	497
21.9 Pfadweise Konvergenz von Verzweigungsprozessen*	501
21.10 Quadratische Variation und lokale Martingale	507
22 Gesetz vom iterierten Logarithmus	519
22.1 Iterierter Logarithmus für die Brown'sche Bewegung	519
22.2 Skorohod'scher Einbettungssatz	522
22.3 Satz von Hartman-Wintner	527
23 Große Abweichungen	529
23.1 Satz von Cramér	530
23.2 Prinzip der großen Abweichungen	534
23.3 Satz von Sanov	539
23.4 Varadhan'sches Lemma und Freie Energie	543
24 Der Poisson'sche Punktprozess	551
24.1 Zufällige Maße	551
24.2 Eigenschaften des Poisson'schen Punktprozesses	555
24.3 Die Poisson-Dirichlet-Verteilung*	562
25 Das Itô-Integral	571
25.1 Das Itô-Integral bezüglich der Brown'schen Bewegung	571
25.2 Itô-Integral bezüglich Diffusionen	580
25.3 Die Itô-Formel	583
25.4 Dirichlet-Problem und Brown'sche Bewegung	591
25.5 Rekurrenz und Transienz der Brown'schen Bewegung	593
26 Stochastische Differentialgleichungen	597
26.1 Starke Lösungen	597

XIV Inhaltsverzeichnis

26.2 Schwache Lösungen und Martingalproblem	606
26.3 Eindeutigkeit schwacher Lösungen via Dualität	613
Literatur	621
Notation	631
Glossar englischer Ausdrücke	635
Namensregister	637
Sachregister	641