

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Gebrauchsanleitung	vii
1 Vom Abstand zur Topologie	1
1.1 Metrische Räume	2
1.1.1 Beispiele für Metriken	3
1.1.2 Diskussion der Begriffsbildung	13
1.2 Stetigkeit und Grenzwerte	15
1.2.1 Stetige Funktionen	16
1.2.2 Grenzwerte	18
1.3 Vollständigkeit und Kompaktheit	23
1.3.1 Vollständige metrische Räume	24
1.3.2 Kompakte metrische Räume	28
1.4 Topologie	30
1.4.1 Umgebungen	31
1.4.2 Stetigkeit für topologische Räume	35
1.4.3 Offene Teilmengen	37
1.4.4 Häufungspunkte und Grenzwerte	41
1.5 Offene Überdeckungen	44
1.5.1 Quasikompakte Teilmengen	45
1.5.2 Der Satz von Heine-Borel	48
1.6 Zusammenfassung und Ausblick	50
2 Von der linearen Gleichung zur Geometrie	55
2.1 Rechenregeln	56
2.1.1 Lineare Gleichungssysteme	58
2.1.2 Vektorräume	68
2.1.3 Homomorphismen	72
2.2 Basis und Dimension	78
2.2.1 Linearkombinationen	78
2.2.2 Dimension	83
2.2.3 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	86
2.2.4 Unendliche Dimension	89
2.3 Normen	94
2.3.1 Motivation der Begriffsbildung	95
2.3.2 Äquivalenz von Normen	102
2.3.3 Innere Produkte	105
2.3.4 Komplexe Vektorräume	109
2.4 Zusammenfassung und Ausblick	115

3	Vom Volumen zum Integral	121
3.1	Heuristiken zur Volumenbestimmung	122
3.2	Messbare Mengen	128
3.2.1	σ -Algebren	129
3.2.2	Äußere Maße	135
3.2.3	ρ -Lebesgue-messbare Mengen	141
3.3	Maße	146
3.3.1	Lebesgue-Maße	148
3.3.2	Wahrscheinlichkeitsmaße	154
3.4	Integrale	159
3.4.1	Messbare Funktionen	161
3.4.2	Einfache Funktionen und ihre Integrale	163
3.4.3	Integrierbare Funktionen	169
3.5	Produktmaße und iterierte Integrale	176
3.5.1	Produktmaße	177
3.5.2	Iterierte Integrale	182
3.5.3	Dominierte Konvergenz	185
3.6	Zusammenfassung und Ausblick	187
4	Von der Linearisierung zum Gleichungslösen	191
4.1	Linearisierung und Differenzierbarkeit	192
4.1.1	Differenzierbarkeit und Ableitung	194
4.1.2	Konstruktion differenzierbarer Abbildungen	199
4.2	Lösungsmengen nichtlinearer Gleichungen	202
4.2.1	Implizite Funktionen	203
4.2.2	Anwendung des Fixpunktprinzips	205
4.2.3	Lokale Parametrisierung von Lösungsmengen	208
4.3	Differentialgleichungen erster Ordnung	213
4.3.1	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	215
4.3.2	Der Satz von Picard-Lindelöf	219
4.4	Höhere Ableitungen	220
4.4.1	Der Satz von Schwarz	222
4.4.2	Die Taylor-Entwicklung	226
4.5	Potenzreihen und analytische Funktionen	233
4.5.1	Potenzreihendarstellung von Funktionen	233
4.5.2	Skalare Potenzreihen	237
4.5.3	Analytische Funktionen	241
4.5.4	Potenzreihenansatz für partielle Differentialgleichungen	243
4.6	Zusammenfassung und Ausblick	245
5	Von der Struktur zur Rechnung	249
5.1	Lineare Abbildungen	250
5.1.1	Darstellende Matrizen	250

5.1.2 Matrizenmultiplikation	253
5.1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren	257
5.2 Determinanten	261
5.2.1 Geometrische Heuristik	263
5.2.2 Permutationen und Vorzeichenwechsel	265
5.2.3 Abbildungseigenschaften	273
5.3 Berechnung von Integralen	279
5.3.1 Die Transformationsformel	279
5.3.2 Koordinatenberechnungen	282
5.4 Multilineare Abbildungen	288
5.4.1 Bi- und Sesquilinearformen	288
5.4.2 Potenzreihen	306
5.5 Zusammenfassung und Ausblick	310
A Mengentheorie	313
Literaturverzeichnis	319
Mathematische Symbole und Index	321