

Inhaltsverzeichnis

1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	1
1.1. Lineare Gleichungssysteme	2
1.2. Lineare Systeme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten	5
1.3. Matrizen	10
1.4. Elementare Umformungen und Zeilenstufenformen	12
1.5. Das Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren	15
1.6. Zur Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	22
1.7. Lineare Systeme mit Parametern	25
1.8. Mehr über Matrizen	26
1.9. Operationen mit Matrizen	29
1.10. Die Matrixform eines linearen Systems	44
1.11. Lineare Systeme mit mehreren rechten Seiten	45
1.12. Inverse Matrizen	48
1.13. Inverse Matrizen und lineare Systeme	56
1.14. Lineare Systeme, die einfach zu lösen sind	59
1.15. Wie löst man lineare Systeme mit dem Computer?	63
1.16. Dreieckszerlegung, LU-Faktorisierung	66
1.17. Lösen linearer Gleichungssysteme in MATLAB	74
1.18. Weitere Bemerkungen und Hinweise	74
Aufgaben	76
 2. Modelle und Anwendungen von linearen Gleichungssystemen und Matrizen	 89
2.1. Produktionsprozesse	90
2.2. Innerbetriebliche Leistungsverrechnung	93
2.3. Matrizenmodelle und Stromgrößen	95
2.4. Computergrafik	97
2.5. Computertomographie	98
2.6. Statistik: Korrelationsmatrizen	102
2.7. Interpolation	105
2.8. Bildverarbeitung	107
2.9. Elektrische Netzwerke	108
2.10. Randwertaufgaben	110
2.11. Abrechnung beim Skat	112
2.12. Matrizenmultiplikationen	115

2.13. Stochastische Prozesse	124
2.14. Zyklische Prozesse	128
2.15. GOOGLE™, PageRank™ und die Wichtigkeit von Internetseiten	129
2.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise	131
Aufgaben	132
3. Vektoren in der Ebene und im Raum	139
3.1. Geometrische Vektoren	140
3.2. Rechnen mit geometrischen Vektoren	142
3.3. Geometrische Vektoren in physikalischen Kontexten	149
3.4. Arithmetische Vektoren	152
3.5. Rechnen mit arithmetischen Vektoren	154
3.6. Arithmetische Vektoren in Anwendungen	158
3.7. Zusammenhänge zwischen geometrischen und arithmetischen Vektoren	159
3.8. Vektoren	165
3.9. Schreibweisen und Vereinbarungen	167
3.10. Anwendung: Stabkräfte eines belasteten Dreibeins	168
3.11. Die Länge von Vektoren	169
3.12. Das Skalarprodukt	172
3.13. CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung. Dreiecksungleichung	183
3.14. Das Kreuzprodukt	185
3.15. Das Spatprodukt	191
3.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise	193
Aufgaben	194
4. Geometrische Modelle in der Ebene und im Raum	203
4.1. Darstellungen von Geraden	203
4.2. Darstellungen von Ebenen	209
4.3. Parameterdarstellungen als Funktionen. Beschreibung von Bewegungen	215
4.4. Elementare Koordinatentransformationen	216
4.5. Weitere Bemerkungen und Hinweise	223
Aufgaben	223
5. Reelle Vektorräume und Unterräume	225
5.1. Die Vektorraum-Definition	225
5.2. Der Vektorraum \mathbb{R}^n	228
5.3. Der Vektorraum der geometrischen Vektoren	229
5.4. Weitere Beispiele von reellen Vektorräumen	230
5.5. Gedanken zu Vektoren und Vektorräumen	231
5.6. Untervektorräume	232
5.7. Der Nullraum und homogene lineare Gleichungssysteme	236

5.8.	Der Durchschnitt von zwei Unterräumen	238
5.9.	Linearkombinationen. Lineare Hülle	239
5.10.	Die vier Fundamentalräume einer Matrix	243
5.11.	Der Spaltenraum und lineare Gleichungssysteme	243
5.12.	Lineare Unabhängigkeit	245
5.13.	Basis und Dimension	249
5.14.	Die Struktur der Lösungsmenge von $Ax = b$	254
5.15.	Lineare Gleichungssysteme. Zeilen- und Spaltenbild	257
5.16.	Basen für die vier Fundamentalräume	259
5.17.	Die Dimensionen der vier Fundamentalräume	264
5.18.	Spaltenraum. Zeilenstufenform. Basisergänzungssatz	267
5.19.	Summe und direkte Summe zweier Unterräumen	271
5.20.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	274
	Aufgaben	276
6.	Der Euklidische Vektorraum \mathbb{R}^n	285
6.1.	Die Orthogonalität der vier Fundamentalräume	288
6.2.	Lineare Gleichungssysteme	294
6.3.	Unlösbare lineare Systeme. Orthogonale Projektionen. Normalgleichungssysteme	301
6.4.	Orthogonal- und Orthonormalbasen	312
6.5.	QR-Faktorisierung	321
6.6.	Lösen von $Ax = b$ mit QR-Faktorisierung	325
6.7.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	327
	Aufgaben	329
7.	Lineare Ausgleichsrechnung	333
7.1.	Lösbarkeit und Beschreibung aller Lösungen	338
7.2.	Beste Approximationen in Unterräumen	343
7.3.	Lösen mit QR-Faktorisierung	346
7.4.	Bestimmung der Federkonstanten im HOOKEschen Gesetz	350
7.5.	Polynomiale Ausgleichsrechnung	351
7.6.	Approximation von Funktionen	353
7.7.	Anpassung von Kurven	355
7.8.	Reduktion der Dimension	357
7.9.	Approximation periodischer Daten	360
7.10.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	363
	Aufgaben	364
8.	Lineare Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m und Matrizen	371
8.1.	Definition und Beispiele	372

8.2.	Eigenschaften linearer Abbildungen	378
8.3.	Verkettung linearer Abbildungen	380
8.4.	Kern und Bild linearer Abbildungen	381
8.5.	Natürliche Darstellungsmatrix	382
8.6.	Weitere Beispiele	385
8.7.	Lineare Abbildungen, Matrizen und die vier Fundamentalräume	388
8.8.	Verkettung und Matrizenmultiplikation	389
8.9.	Umkehrabbildung und Umkehrmatrix	393
8.10.	Beispiel: Reelle diskrete FOURIER-Transformation	396
8.11.	Beispiel: Lineare Filter	397
8.12.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	398
	Aufgaben	400
9.	Modelle und Anwendungen von linearen Abbildungen und Matrizen	405
9.1.	Lineare Abbildungen in der Ebene (2D)	405
9.2.	Verschiebungen (Translationen) in der Ebene	420
9.3.	Homogene Koordinaten	421
9.4.	Verkettungen von Transformationen	422
9.5.	Lineare Abbildungen im Raum (3D)	425
9.6.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	435
	Aufgaben	435
10.	Determinanten	439
10.1.	Die Determinante einer $(2, 2)$ -Matrix	439
10.2.	Verallgemeinerung auf (n, n) -Matrizen	442
10.3.	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	446
10.4.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	450
	Aufgaben	450
11.	Eigenwerte und Eigenvektoren	453
11.1.	Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren?	455
11.2.	Diagonalisierung einer Matrix	461
11.3.	Warum eine Matrix diagonalisieren?	465
11.4.	Orthogonale Matrizen	467
11.5.	Symmetrische $(2, 2)$ -Matrizen	470
11.6.	Diagonalisierung mit orthogonalen Matrizen	473
11.7.	Spektraldarstellung in dyadischer Form	475
11.8.	Weitere Bemerkungen und Hinweise	478
	Aufgaben	480

12. Modelle und Anwendungen von Eigensystemen	485
12.1. Eigensysteme und Differenzialgleichungen	486
12.2. Eigensysteme und Differenzengleichungen	501
12.3. Eigensysteme und Kegelschnitte	513
12.4. Weitere Bemerkungen und Hinweise	518
Aufgaben	519
13. Die Singulärwertzerlegung	521
13.1. Hauptsatz und Berechnung der Singulärwertzerlegung	521
13.2. Reduzierte Singulärwertzerlegung	531
13.3. Lösen mit (reduzierter) SVD-Faktorisierung	532
13.4. Dyadische Form der Singulärwertzerlegung	533
13.5. Anwendung: Bildkompression	536
13.6. Lineare Systeme und die Pseudoinverse	538
13.7. Die rangdefekte lineare Ausgleichsaufgabe	542
13.8. Weitere Bemerkungen und Hinweise	549
Aufgaben	549
14. Lineare Abbildungen von V nach W und Matrizen	553
14.1. Definition und Beispiele	553
14.2. Eigenschaften linearer Abbildungen	556
14.3. Verkettung und Matrizenmultiplikation	559
14.4. Kern und Bild	560
14.5. Strukturgleichheit (Isomorphie)	566
14.6. Weitere Bemerkungen und Hinweise	570
Aufgaben	572
15. Darstellungsmatrizen und Basiswechsel	575
15.1. Koordinaten bezüglich einer Basis	575
15.2. Basiswechsel	580
15.3. Darstellungsmatrix	589
15.4. Verkettung und Matrizenmultiplikation	601
15.5. Veränderung der Darstellungsmatrix bei Basiswechsel	602
15.6. Diagonalisierung, Faktorisierung und Basiswechsel	606
15.7. Weitere Bemerkungen und Hinweise	608
Aufgaben	608
A. Vier Hauptaufgaben der Linearen Algebra	611
B. Lineare Gleichungssysteme	613
Schlussbemerkungen und Hinweise	615

Musterlösungen der Aufgaben	617
Literaturverzeichnis	719
Symbole und Bedeutungen. Alphabet	725
Namen- und Stichwortverzeichnis	727