

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen</b>	<b>1</b>
1.1. Lineare Gleichungssysteme . . . . .	2
1.2. Lineare Systeme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten . . . . .	5
1.3. Matrizen . . . . .	10
1.4. Elementare Umformungen und Zeilenstufenformen . . . . .	12
1.5. Das Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .	15
1.6. Zur Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme . . . . .	22
1.7. Lineare Systeme mit Parametern . . . . .	25
1.8. Mehr über Matrizen . . . . .	26
1.9. Operationen mit Matrizen . . . . .	29
1.10. Die Matrixform eines linearen Systems . . . . .	44
1.11. Lineare Systeme mit mehreren rechten Seiten . . . . .	45
1.12. Inverse Matrizen . . . . .	48
1.13. Inverse Matrizen und lineare Systeme . . . . .	56
1.14. Lineare Systeme, die einfach zu lösen sind . . . . .	59
1.15. Wie löst man lineare Systeme mit dem Computer? . . . . .	63
1.16. Dreieckszerlegung, LU-Faktorisierung . . . . .	66
1.17. Lösen linearer Gleichungssysteme in MATLAB . . . . .	74
1.18. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	74
Aufgaben . . . . .	76
<b>2. Modelle und Anwendungen von linearen Gleichungssystemen und Matrizen</b>	<b>89</b>
2.1. Produktionsprozesse . . . . .	90
2.2. Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . . .	93
2.3. Matrizenmodelle und Stromgrößen . . . . .	95
2.4. Computergrafik . . . . .	97
2.5. Computertomographie . . . . .	98
2.6. Statistik: Korrelationsmatrizen . . . . .	102
2.7. Interpolation . . . . .	105
2.8. Bildverarbeitung . . . . .	107
2.9. Elektrische Netzwerke . . . . .	108
2.10. Randwertaufgaben . . . . .	110
2.11. Abrechnung beim Skat . . . . .	112
2.12. Matrizenmultiplikationen . . . . .	115

2.13. Stochastische Prozesse . . . . .	124
2.14. Zyklische Prozesse . . . . .	128
2.15. GOOGLE™, PageRank™ und die Wichtigkeit von Internetseiten . . . . .	129
2.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	131
Aufgaben . . . . .	132
<b>3. Vektoren in der Ebene und im Raum</b>	<b>139</b>
3.1. Geometrische Vektoren . . . . .	140
3.2. Rechnen mit geometrischen Vektoren . . . . .	142
3.3. Geometrische Vektoren in physikalischen Kontexten . . . . .	149
3.4. Arithmetische Vektoren . . . . .	152
3.5. Rechnen mit arithmetischen Vektoren . . . . .	154
3.6. Arithmetische Vektoren in Anwendungen . . . . .	158
3.7. Zusammenhänge zwischen geometrischen und arithmetischen Vektoren . . . . .	159
3.8. Vektoren . . . . .	165
3.9. Schreibweisen und Vereinbarungen . . . . .	167
3.10. Anwendung: Stabkräfte eines belasteten Dreibeins . . . . .	168
3.11. Die Länge von Vektoren . . . . .	169
3.12. Das Skalarprodukt . . . . .	172
3.13. CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung. Dreiecksungleichung . . . . .	183
3.14. Das Kreuzprodukt . . . . .	185
3.15. Das Spatprodukt . . . . .	191
3.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	193
Aufgaben . . . . .	194
<b>4. Geometrische Modelle in der Ebene und im Raum</b>	<b>203</b>
4.1. Darstellungen von Geraden . . . . .	203
4.2. Darstellungen von Ebenen . . . . .	209
4.3. Parameterdarstellungen als Funktionen. Beschreibung von Bewegungen . . . . .	215
4.4. Elementare Koordinatentransformationen . . . . .	216
4.5. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	223
Aufgaben . . . . .	223
<b>5. Reelle Vektorräume und Unterräume</b>	<b>225</b>
5.1. Die Vektorraum-Definition . . . . .	225
5.2. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	228
5.3. Der Vektorraum der geometrischen Vektoren . . . . .	229
5.4. Weitere Beispiele von reellen Vektorräumen . . . . .	230
5.5. Gedanken zu Vektoren und Vektorräumen . . . . .	231
5.6. Untervektorräume . . . . .	232
5.7. Der Nullraum und homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	236

---

5.8.	Der Durchschnitt von zwei Unterräumen . . . . .	238
5.9.	Linearkombinationen. Lineare Hülle . . . . .	239
5.10.	Die vier Fundamentalräume einer Matrix . . . . .	243
5.11.	Der Spaltenraum und lineare Gleichungssysteme . . . . .	243
5.12.	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	245
5.13.	Basis und Dimension . . . . .	249
5.14.	Die Struktur der Lösungsmenge von $Ax = b$ . . . . .	254
5.15.	Lineare Gleichungssysteme. Zeilen- und Spaltenbild . . . . .	257
5.16.	Basen für die vier Fundamentalräume . . . . .	259
5.17.	Die Dimensionen der vier Fundamentalräume . . . . .	264
5.18.	Spaltenraum. Zeilenstufenform. Basisergänzungssatz . . . . .	267
5.19.	Summe und direkte Summe zweier Unterräumen . . . . .	271
5.20.	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	274
	Aufgaben . . . . .	276
<b>6.</b>	<b>Der Euklidische Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>285</b>
6.1.	Die Orthogonalität der vier Fundamentalräume . . . . .	288
6.2.	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	294
6.3.	Unlösbarer lineare Systeme. Orthogonale Projektionen. Normalgleichungssysteme . . . . .	301
6.4.	Orthogonal- und Orthonormalbasen . . . . .	312
6.5.	QR-Faktorisierung . . . . .	321
6.6.	Lösen von $Ax = b$ mit QR-Faktorisierung . . . . .	325
6.7.	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	327
	Aufgaben . . . . .	329
<b>7.</b>	<b>Lineare Ausgleichsrechnung</b>	<b>333</b>
7.1.	Lösbarkeit und Beschreibung aller Lösungen . . . . .	338
7.2.	Beste Approximationen in Unterräumen . . . . .	343
7.3.	Lösen mit QR-Faktorisierung . . . . .	346
7.4.	Bestimmung der Federkonstanten im HOOKESCHEN Gesetz . . . . .	350
7.5.	Polynomiale Ausgleichsrechnung . . . . .	351
7.6.	Approximation von Funktionen . . . . .	353
7.7.	Anpassung von Kurven . . . . .	355
7.8.	Reduktion der Dimension . . . . .	357
7.9.	Approximation periodischer Daten . . . . .	360
7.10.	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	363
	Aufgaben . . . . .	364
<b>8.</b>	<b>Lineare Abbildungen von <math>\mathbb{R}^n</math> nach <math>\mathbb{R}^m</math> und Matrizen</b>	<b>371</b>
8.1.	Definition und Beispiele . . . . .	372

8.2. Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .	378
8.3. Verkettung linearer Abbildungen . . . . .	380
8.4. Kern und Bild linearer Abbildungen . . . . .	381
8.5. Natürliche Darstellungsmatrix . . . . .	382
8.6. Weitere Beispiele . . . . .	385
8.7. Lineare Abbildungen, Matrizen und die vier Fundamentalräume . . . . .	388
8.8. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . . .	389
8.9. Umkehrabbildung und Umkehrmatrix . . . . .	393
8.10. Beispiel: Reelle diskrete FOURIER-Transformation . . . . .	396
8.11. Beispiel: Lineare Filter . . . . .	397
8.12. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	398
Aufgaben . . . . .	400
<b>9. Modelle und Anwendungen von linearen Abbildungen und Matrizen</b>	<b>405</b>
9.1. Lineare Abbildungen in der Ebene (2D) . . . . .	405
9.2. Verschiebungen (Translationen) in der Ebene . . . . .	420
9.3. Homogene Koordinaten . . . . .	421
9.4. Verkettungen von Transformationen . . . . .	422
9.5. Lineare Abbildungen im Raum (3D) . . . . .	425
9.6. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	435
Aufgaben . . . . .	435
<b>10. Determinanten</b>	<b>439</b>
10.1. Die Determinante einer $(2, 2)$ -Matrix . . . . .	439
10.2. Verallgemeinerung auf $(n, n)$ -Matrizen . . . . .	442
10.3. Determinanten und lineare Gleichungssysteme . . . . .	446
10.4. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	450
Aufgaben . . . . .	450
<b>11. Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>453</b>
11.1. Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren? . . . . .	455
11.2. Diagonalisierung einer Matrix . . . . .	461
11.3. Warum eine Matrix diagonalisieren? . . . . .	465
11.4. Orthogonale Matrizen . . . . .	467
11.5. Symmetrische $(2, 2)$ -Matrizen . . . . .	470
11.6. Diagonalisierung mit orthogonalen Matrizen . . . . .	473
11.7. Spektraldarstellung in dyadischer Form . . . . .	475
11.8. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	478
Aufgaben . . . . .	480

---

<b>12. Modelle und Anwendungen von Eigensystemen</b>	<b>485</b>
12.1. Eigensysteme und Differentialgleichungen . . . . .	486
12.2. Eigensysteme und Differenzengleichungen . . . . .	501
12.3. Eigensysteme und Kegelschnitte . . . . .	513
12.4. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	518
Aufgaben . . . . .	519
<b>13. Die Singulärwertzerlegung</b>	<b>521</b>
13.1. Hauptsatz und Berechnung der Singulärwertzerlegung . . . . .	521
13.2. Reduzierte Singulärwertzerlegung . . . . .	531
13.3. Lösen mit (reduzierter) SVD-Faktorisierung . . . . .	532
13.4. Dyadische Form der Singulärwertzerlegung . . . . .	533
13.5. Anwendung: Bildkompression . . . . .	536
13.6. Lineare Systeme und die Pseudoinverse . . . . .	538
13.7. Die rangdefekte lineare Ausgleichsaufgabe . . . . .	542
13.8. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	549
Aufgaben . . . . .	549
<b>14. Lineare Abbildungen von <math>V</math> nach <math>W</math> und Matrizen</b>	<b>553</b>
14.1. Definition und Beispiele . . . . .	553
14.2. Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .	556
14.3. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . . .	559
14.4. Kern und Bild . . . . .	560
14.5. Strukturgleichheit (Isomorphie) . . . . .	566
14.6. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	570
Aufgaben . . . . .	572
<b>15. Darstellungsmatrizen und Basiswechsel</b>	<b>575</b>
15.1. Koordinaten bezüglich einer Basis . . . . .	575
15.2. Basiswechsel . . . . .	580
15.3. Darstellungsmatrix . . . . .	589
15.4. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . . .	601
15.5. Veränderung der Darstellungsmatrix bei Basiswechsel . . . . .	602
15.6. Diagonalisierung, Faktorisierung und Basiswechsel . . . . .	606
15.7. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	608
Aufgaben . . . . .	608
<b>A. Vier Hauptaufgaben der Linearen Algebra</b>	<b>611</b>
<b>B. Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>613</b>
<b>Schlussbemerkungen und Hinweise</b>	<b>615</b>

<b>Musterlösungen der Aufgaben</b>	<b>617</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>719</b>
<b>Symbole und Bedeutungen. Alphabet</b>	<b>725</b>
<b>Namen- und Stichwortverzeichnis</b>	<b>727</b>