

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>2 Algebra</b>	<b>1</b>
2.1 Elementare Methoden	1
2.1.1 Kombinatorik	1
2.1.2 Determinanten	4
2.1.3 Matrizen	8
2.1.4 Lineare Gleichungssysteme	12
2.1.5 Das Rechnen mit Polynomen	18
2.1.6 Der Fundamentalsatz der klassischen Algebra von Gauß	20
2.1.7 Partialbruchzerlegung	27
2.2 Matrizenkalkül	28
2.2.1 Das Spektrum einer Matrix	28
2.2.2 Normalformen von Matrizen	30
2.2.3 Matrizenfunktionen	38
2.3 Lineare Algebra	40
2.3.1 Grundideen	40
2.3.2 Lineare Räume	41
2.3.3 Lineare Operatoren	43
2.3.4 Das Rechnen mit linearen Räumen	48
2.3.5 Dualität	52
2.4 Multilineare Algebra	53
2.4.1 Algebren	54
2.4.2 Das Rechnen mit Multilinearformen	54
2.4.3 Universelle Produkte	60
2.4.4 Liealgebren	64
2.4.5 Superalgebren	65
2.5 Algebraische Strukturen	66
2.5.1 Gruppen	66
2.5.2 Ringe	72
2.5.3 Körper	75
2.6 Galoistheorie und algebraische Gleichungen	78
2.6.1 Die drei berühmten Probleme der Antike	78
2.6.2 Der Hauptsatz der Galoistheorie	78
2.6.3 Der verallgemeinerte Fundamentalsatz der Algebra	81
2.6.4 Klassifikation von Körpererweiterungen	82
2.6.5 Der Hauptsatz über Gleichungen, die durch Radikale lösbar sind	83
2.6.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	85
2.7 Zahlentheorie	88
2.7.1 Grundideen	88
2.7.2 Der Euklidische Algorithmus	90
2.7.3 Die Verteilung der Primzahlen	93
2.7.4 Additive Zerlegungen	99
2.7.5 Die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen und Kettenbrüche	102
2.7.6 Transzendente Zahlen	108

2.7.7	Anwendung auf die Zahl $\pi$ . . . . .	111
2.7.8	Gaußsche Kongruenzen . . . . .	116
2.7.9	Minkowskis Geometrie der Zahlen . . . . .	119
2.7.10	Das fundamentale Lokal-Global-Prinzip der Zahlentheorie . . . . .	119
2.7.11	Ideale und höhere Teilbarkeitslehre . . . . .	121
2.7.12	Anwendungen auf quadratische Zahlkörper . . . . .	123
2.7.13	Die analytische Klassenzahlformel . . . . .	125
2.7.14	Die Hilbertsche Klassenkörpertheorie für allgemeine Zahlkörper . . . . .	126
Literatur zu Kapitel 2 . . . . .		127
<b>3</b>	<b>Geometrie</b>	<b>129</b>
3.1	Die Grundidee der Geometrie (Erlanger Programm) . . . . .	129
3.2	Elementare Geometrie . . . . .	130
3.2.1	Ebene Trigonometrie . . . . .	131
3.2.2	Anwendungen in der Geodäsie . . . . .	138
3.2.3	Sphärische Trigonometrie . . . . .	140
3.2.4	Anwendungen im Schiffs- und Flugverkehr . . . . .	146
3.2.5	Die Hilbertschen Axiome der Geometrie . . . . .	147
3.2.6	Das Parallelenaxiom des Euklid . . . . .	151
3.2.7	Die nichteuklidische elliptische Geometrie . . . . .	151
3.2.8	Die nichteuklidische hyperbolische Geometrie . . . . .	152
3.3	Anwendungen der Vektoralgebra in der analytischen Geometrie . . . . .	155
3.3.1	Geraden in der Ebene . . . . .	155
3.3.2	Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	157
3.3.3	Volumina . . . . .	159
3.4	Euklidische Geometrie (Geometrie der Bewegungen) . . . . .	159
3.4.1	Die euklidische Bewegungsgruppe . . . . .	159
3.4.2	Kegelschnitte . . . . .	160
3.4.3	Flächen zweiter Ordnung . . . . .	163
3.5	Projektive Geometrie . . . . .	167
3.5.1	Grundideen . . . . .	167
3.5.2	Projektive Abbildungen . . . . .	169
3.5.3	Der $n$ -dimensionale reelle projektive Raum . . . . .	170
3.5.4	Der $n$ -dimensionale komplexe projektive Raum . . . . .	172
3.5.5	Die Klassifikation der ebenen Geometrien . . . . .	173
3.6	Differentialgeometrie . . . . .	176
3.6.1	Ebene Kurven . . . . .	177
3.6.2	Raumkurven . . . . .	183
3.6.3	Die lokale Gaußsche Flächentheorie . . . . .	187
3.6.4	Globale Gaußsche Flächentheorie . . . . .	197
3.7	Beispiele für ebene Kurven . . . . .	198
3.7.1	Einhüllende und Kaustik . . . . .	198
3.7.2	Evoluten . . . . .	198
3.7.3	Evolventen . . . . .	199
3.7.4	Die Traktrix von Huygens und die Kettenlinie . . . . .	200
3.7.5	Die Lemniskate von Jakob Bernoulli und die Cassinischen Kurven . . . . .	201
3.7.6	Die Lissajou-Kurven . . . . .	202
3.7.7	Spiralen . . . . .	202
3.7.8	Strahlkurven (Konchoiden) . . . . .	204
3.7.9	Radkurven . . . . .	205

3.8	Algebraische Geometrie . . . . .	209
3.8.1	Grundideen . . . . .	209
3.8.2	Beispiele ebener algebraischer Kurven . . . . .	218
3.8.3	Anwendungen in der Integralrechnung . . . . .	223
3.8.4	Die projektiv-komplexe Form einer ebenen algebraischen Kurve . . . . .	225
3.8.5	Das Geschlecht einer Kurve . . . . .	229
3.8.6	Diophantische Geometrie . . . . .	232
3.8.7	Analytische Mengen und der Vorbereitungssatz von Weierstraß . . . . .	238
3.8.8	Die Auflösung von Singularitäten . . . . .	239
3.8.9	Die Algebraisierung der modernen algebraischen Geometrie . . . . .	241
3.9	Geometrien der modernen Physik . . . . .	242
3.9.1	Grundideen . . . . .	242
3.9.2	Unitäre Geometrie, Hilberträume und Elementarteilchen . . . . .	245
3.9.3	Pseudounitäre Geometrie . . . . .	252
3.9.4	Minkowskigeometrie . . . . .	255
3.9.5	Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie . . . . .	259
3.9.6	Spingeometrie und Fermionen . . . . .	265
3.9.7	Fast komplexe Strukturen . . . . .	274
3.9.8	Symplektische Geometrie . . . . .	274
	<b>Literatur zu Kapitel 3 . . . . .</b>	<b>276</b>
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Mathematik . . . . .</b>	<b>281</b>
4.1	Der Sprachgebrauch in der Mathematik . . . . .	281
4.1.1	Wahre und falsche Aussagen . . . . .	281
4.1.2	Implikationen . . . . .	282
4.1.3	Tautologien und logische Gesetze . . . . .	284
4.2	Beweismethoden . . . . .	286
4.2.1	Indirekte Beweise . . . . .	286
4.2.2	Induktionsbeweise . . . . .	286
4.2.3	Eindeutigkeitsbeweise . . . . .	287
4.2.4	Existenzbeweise . . . . .	287
4.2.5	Die Notwendigkeit von Beweisen im Computerzeitalter . . . . .	289
4.2.6	Falsche Beweise . . . . .	291
4.3	Anschauliche Mengentheorie . . . . .	292
4.3.1	Grundideen . . . . .	292
4.3.2	Das Rechnen mit Mengen . . . . .	294
4.3.3	Abbildungen . . . . .	297
4.3.4	Gleichmächtige Mengen . . . . .	301
4.3.5	Relationen . . . . .	302
4.3.6	Mengensysteme . . . . .	304
4.4	Mathematische Logik . . . . .	305
4.4.1	Aussagenlogik . . . . .	305
4.4.2	Prädikatenlogik . . . . .	308
4.4.3	Die Axiome der Mengentheorie . . . . .	310
4.4.4	Cantors Strukturierung des Unendlichen . . . . .	311
4.5	Geschichte der axiomatischen Methode . . . . .	314
	<b>Literatur zu Kapitel 4 . . . . .</b>	<b>317</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>318</b>