

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	9
Danksagung	9
Einleitung	25
Ein leicht verständlicher Einstieg in die höhere Mathematik anhand vieler Beispiele	25
Überall praktische Beispiele	25
Törichte Annahmen über den Leser	26
Konventionen in diesem Buch	26
Wie dieses Buch strukturiert ist	27
Teil I: Zahlen und Rechenoperationen	27
Teil II: Keine Angst vor Gleichungen, Vektoren und Matrizen	27
Teil III: Funktionen, Folgen und Reihen	27
Teil IV: Keine Angst vor Geometrie	27
Teil V: Differentiation und Integralrechnung für eine Variable	28
Teil VI: Differentiation und Integralrechnung für zwei Variablen	28
Teil VII: Der Top-Ten-Teil	28
Die Symbole in diesem Buch	29
Den modularen Aufbau für sich nutzen	29
Teil I	
Zahlen und Rechenoperationen	31
Kapitel 1	
Zahlen und Grundrechenarten	33
Mathematik und ihre natürlichen Zahlen	33
Eigenschaften der Grundrechenarten	35
Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	36
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	39
Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders	39
Rationale Zahlen und ihre Dezimalbrüche	42
Und plötzlich wird's irrational... und real!	44
Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen	46
Das Summenzeichen	47

Kapitel 2

Rechnen mit Polynomen, Potenzen und Logarithmen

49

Alles über Mengen	49
Mengen im Supermarkt?	49
Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen	50
Von Zahlen, Mengen und Intervallen	52
Mit Mengen einfach rechnen können	52
Venn-Diagramme	56
Prozentrechnung für den Alltag	58
Nur zwei Prozent Mieterhöhung	59
Das eigene Heim trotz Provision?	59
Die Bären kommen – Sinkende Aktienkurse	59
Bullen im Vormarsch – Steigende Kurse	59
Wie viele Bullen hätten die Bären gezähmt?	60
Immer auf die genaue Formulierung achten	60
Preissenkungsschnäppchen mitnehmen	60
Zinsrechnung zum Verstehen	61
Lohnender Zinsertrag	61
Höhe des Zinssatzes für Ihre Träume	61
Suche nach dem Startkapital	62
Taggenaue Zinsen	62
Kapitalwachstum: Zinseszins	62
Eine feste Anlage für zehn Jahre	63
Das sich verdoppelnde Kapital bei festem Zins	63
Das sich verdoppelnde Kapital bei fester Jahresanzahl	64
Keine Angst vor Wurzeln und Potenzen	64

Kapitel 3

Logische Grundlagen und Beweismethoden

65

Logische Grundlagen	65
Wahre und falsche Aussagen	65
Aussagen verknüpfen	66
Die Mathematik als Sprache erkennen	67
Terme als die Worte im mathematischen Satz	68
Formeln sind die Sätze der mathematischen Sprache	68
Mit Quantoren neue Formeln bilden	69
Notwendige und hinreichende Bedingungen	71
Die Unendlichkeit – unzählige Welten?	73
Mit abzählbaren Mengen zählen lernen	73
Jenseits der Zählbarkeit – überabzählbare Mengen	75
Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik	76
Methode 1: Direkter Beweis	77
Methode 2: Indirekter Beweis	77
Methode 3: Beweis durch Fallunterscheidung	79
Methode 4: Beweis durch vollständige Induktion	80

Kapitel 4

Grundlagen von Gleichungen und Ungleichungen 83

Gleichungen in Angriff nehmen	83
Ungleichungen in den Griff bekommen	88
Beträge ins Spiel bringen	89

Teil II

Keine Angst vor Gleichungen, Vektoren und Matrizen 93

Kapitel 5

Nicht reell aber real – die komplexen Zahlen 95

Was komplexe Zahlen wirklich sind	95
Komplexe Rechenoperationen	96
Die komplexe Addition	97
Die komplexe Multiplikation	97
Die Konjugierte einer komplexen Zahl	97
Die komplexe Division	98
Zusammenhänge zwischen den komplexen Operationen	98
Komplexe quadratische Gleichungen	99
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen	100
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	101
Der Betrag einer komplexen Zahl	101
Einmal Polarkoordinaten und zurück	102
Umwandlung in Polarkoordinaten aus Koordinaten	103
Umwandlung in Koordinaten aus Polarkoordinaten	103
Komplexe Potenzen und Wurzeln	104
Anwendungen komplexer Zahlen	106

Kapitel 6

Die Grundlagen: Allgemeine Vektorräume und lineare Gleichungssysteme 109

Vektoren erleben	109
Vektoren veranschaulichen	111
Mit Vektoren anschaulich rechnen	112
Mit Vektoren rechnen	113
Betrag eines Vektors berechnen	116
Das Skalarprodukt von Vektoren berechnen	117
Schöne Vektorraumteilmengen: Untervektorräume bestimmen	119
Vektoren und ihre Koordinaten bestimmen	122
Arten von Linearen Gleichungssystemen	125
Homogene Gleichungssysteme	126
Inhomogene Gleichungssysteme	126
Überbestimmte Gleichungssysteme	127
Unterbestimmte Gleichungssysteme	128

Quadratische Gleichungssysteme	128
Nicht lösbare Gleichungssysteme	129
Graphische Lösungsansätze für LGS	130

Kapitel 7

Vektoren im dreidimensionalen Raum: Punkte, Geraden und Ebenen **131**

Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	131
Punkte im Raum	131
Parametergleichung für Geraden	132
Zweipunktgleichung für Geraden	134
Parametergleichung für Ebenen	135
Dreipunktgleichung für Ebenen	136
Koordinatengleichung für Ebenen	136
Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	137
Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	139
Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	146

Kapitel 8

Überleben in der Welt der Matrizen **149**

Was Matrizen eigentlich sind	149
Addition von Matrizen	150
Skalarmultiplikation von Matrizen	151
Multiplikation von Matrizen	151
Matrizen in Produktionsprozessen	152
Transponierte und symmetrische Matrizen	154
Keine Angst vor inversen Matrizen	154
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	155
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	156
Der Rang von Matrizen	161
Matrizen invertieren in der Praxis	162
Kriterien für die Lösbarkeit von homogenen Gleichungssystemen	163
Kriterien für die Lösbarkeit von inhomogenen Gleichungssystemen	164
Matrizen und lineare Abbildungen	164
Lineare Abbildungen an Beispielen	165
Matrizen als lineare Abbildungen	166
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie	166
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis	167
Lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen	169
Matrizen und ihre Determinanten	171
Determinanten von 2×2 -Matrizen	171
Determinanten von 3×3 -Matrizen	171
Determinanten von allgemeinen Matrizen	172
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	175
Die Cramersche Regel	175

Die Inversen mittels der Adjunktenformel berechnen	178
Flächen und Volumina mittels Determinanten berechnen	179
Kreuzprodukt von Vektoren	180
Praktische Anwendung: Spiegelungen und Drehungen in der Ebene	182
Drehungen in der Ebene	182
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene	185
Spiegelungen in der Ebene	185
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene	187

Teil III

Funktionen, Folgen und Reihen **189**

Kapitel 9

Was Funktionen sind! **191**

Was Funktionen eigentlich sind	191
Graphische Darstellung von Funktionen	193
Polynome einfach verstehen	194
Bruchrechnung: Rationale Funktionen	197
Keine Angst vor der Polynomdivision	198
Rasch wachsende Exponentialfunktionen	200
Umgekehrt betrachtet: Logarithmusfunktionen	201
Von Umkehr- und inversen Funktionen	202
Trigonometrische Funktionen	203
Trigonometrische Funktionen zeichnen	204
Identifikation (von und) mit trigonometrischen Identitäten	205
Trigonometrische Kehrwert- und Umkehrfunktionen	205

Kapitel 10

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen **209**

Grenzwerte einer Funktion verstehen	209
Drei Funktionen erklären den Grenzwertbegriff	209
Links- und rechtsseitige Grenzwerte	210
Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!	211
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	211
Grenzwerte für x gegen unendlich	212
Stetigkeit von Funktionen	213
Einfache Grenzwerte auswerten	216
Einfachste Methode: Einsetzen und Auswerten	216
Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	217
Methode 1: Faktorisieren	217
Methode 2: Konjugierte Multiplikation	217
Methode 3: Einfache algebraische Umformungen	218
Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich	218
Grenzwerte bei unendlich auswerten	221

Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	221
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	222

Kapitel 11

Von Folgen und Reihen **223**

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	223
Folgen aneinanderreihen	223
Reihen summieren	227
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	229
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	229
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	230
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	233
Quotienten- und Wurzelkriterium	236
Alternierende Reihen	238
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	238
Leibniz und das Kriterium für alternierende Reihen	239
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	242
Eine erste spezielle Reihenart, die Potenzreihen	244
Potenzreihen (er)kennen	244
Konvergenzbereich von Potenzreihen	246
Rechnen Sie mit Potenzreihen	247
Eine zweite spezielle Reihenart, die Taylorreihen	248

Teil IV

Keine Angst vor Geometrie **251**

Kapitel 12

Von Winkeln, Geraden und Dreiecken: Grundlagen der Geometrie **253**

Geraden, Strahlen und Winkel	253
Winkel an geschnittenen Geraden	256
Strecken in der Ebene	257
Mit den Strahlensätzen rechnen	257
Goldener Schnitt	259
Das allgemeine Dreieck	261
Das gleichschenklige Dreiecke	262
Das gleichseitige Dreieck	263
Das rechtwinklige Dreieck	263
Interessante Schnittpunkte in Dreiecken	264
Dreiecke und ihre Seitenhalbierende samt Schwerpunkte	265
Dreiecke und ihr Mittelsenkrechte samt Umkreise	265
Dreiecke und ihre Winkelhalbierende samt Inkreisen	266
Dreiecke und ihre Höhenschnittpunkt	266
Kongruenz von Dreiecken	267
Ähnlichkeit von Dreiecken	269

Kapitel 13

Elementare Figuren der Geometrie in Ebene und Raum

271

Die zweidimensionale Welt: Von Vierecken über n -Ecke zu Kreisen	271
Vierecke (er)kennen lernen	271
Allgemeine und regelmäßige n -Ecke	277
Keine Angst vor Kreisen	279
Geometrische Körper – die dreidimensionale Welt	283
Die Welt der Prismen	284
Es mit Pyramiden auf die Spitze treiben	286
Zylinder aus Prismen entwickeln	289
Aus Pyramiden werden Kegel	290
Die Kugel – schlicht und makellos	291
Ein komplexeres Beispiel aus der Praxis: Optimale Blechbehälter gesucht!	293
Platonische Körper genießen	294

Teil V

Differential- und Integralrechnung für eine Variable

297

Kapitel 14

Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen

299

Erste Schritte des Ableitens	299
Steigungen gesucht!	299
Steigung von Geraden	300
Steigungen von Parabeln	302
Der Differenzenquotient	303
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	307
Grundlegende Regeln der Differentiation	309
Die Konstantenregel	309
Die Potenzregel	309
Die Koeffizientenregel	309
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	310
Trigonometrische Funktionen differenzieren	310
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	310
Fortgeschrittene Regeln der Differentiation	311
Die Produktregel	312
Die Quotientenregel	312
Die Kettenregel	312
Implizite Differentiation	315
Logarithmische Differentiation	317
Differentiation von Umkehrfunktionen	317
Keine Angst vor höheren Ableitungen	319

Kapitel 15

Kurvendiskussion: Extrem-, Wende- und Sattelpunkte

321

Kurvendiskussion einmal praktisch veranschaulicht	321
Berg und Tal: Positive und negative Steigungen	322
Bauchgefühle: Konvexität und Wendepunkte	322
Am Tiefpunkt angelangt: Ein lokales Minimum	323
Atemberaubender Blick: Das globale Maximum	323
Achtung – Nicht auf der Spitze stecken bleiben	323
Halten Sie sich fest – nun geht's bergab!	323
Jetzt wird's kritisch an den Punkten!	324
Lokale Extremwerte finden	325
Die kritischen Werte suchen	325
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	326
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	327
Globale Extremwerte über einem abgeschlossenem Intervall finden	328
Globale Extrempunkte über den gesamten Definitionsbereich finden	330
Konvexität und Wendepunkte praktisch bestimmen	332
Die Graphen von Ableitungen – jetzt wird gezeichnet!	334
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	336
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	338
Das nützliche Taylorpolynom	339
Die Regel von l'Hospital	343
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	344
Kombinieren der Methoden – nur Geduld!	344

Kapitel 16

Eindimensionale Integration

347

Flächenberechnung – eine Einführung	347
Flächen mithilfe von Rechtecksummen annähern	348
Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln	352
Stammfunktionen suchen – rückwärts Ableiten	354
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	355
Flächenfunktion beschreiben	356
Achtung Tusch: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	358
Die erste Version des Hauptsatzes	358
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	361
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen	363

Kapitel 17

Integrale praktisch lösen – Tipps und Tricks

365

Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	365
Umkehrregeln für Stammfunktionen	365
Genial einfach: Raten und Prüfen	366
Die Substitutionsmethode	367

Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	370
Partielle Integration: Teile und Herrsche!	371
Wählen Sie weise!	372
Partielle Integration: Immer wieder dasselbe!	374
Im Kreis gelaufen und doch am Ziel	374

Kapitel 18

Spezielle Integrale praktisch lösen – Tipps und Tricks **377**

Integrale mit Sinus und Kosinus	377
Fall 1: Die Potenz vom Sinus ist ungerade und positiv	377
Fall 2: Die Potenz vom Kosinus ist ungerade und positiv	378
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade aber nicht negativ	378
Integrieren mit dem A-B-C der Partialbrüche	379
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	380
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	381
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	382
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	383
Integrale rationaler Funktionen von Sinus und Kosinus	384
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	384
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	385
Bogenlängen bestimmen	387
Oberflächen von einfachen Rotationskörpern bestimmen	389

Teil VI

Differential- und Integralrechnung für zwei Variablen **391**

Kapitel 19

Kurvendiskussion von Funktionen zweier Variablen **393**

Funktionen mehrerer Variabler graphisch darstellen	393
Mit Schnitten und Niveau zum Erfolg	396
Schnitte von Graphen	396
Höhen- und Niveaulinien von Graphen	397
Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler	398
Partielle Ableitungen – auch hier ein Kinderspiel	401
Unabhängiges Pärchen: Partielle Ableitungen und Stetigkeit	403
Tangentialebenen als Tangenten-Alternative	403
Volles Programm: Totale Differenzierbarkeit	404
Gewünschte Zugabe: Totales Differential	404
Rechenregeln des Ableitens für Funktionen mehrerer Variablen	405
Implizite Funktionen differenzieren können	407
Höhere Ableitungen: Hilfe durch den Satz von Schwarz	408
Kurvendiskussion für Funktionen mehrerer Variabler	410
Kritische Punkte von Funktionen in höheren Dimensionen	410

Hinreichende Kriterien für Extrema und Sattelpunkte	412
Hinreichende Kriterien für Funktionen in zwei Variablen	413
Extremwerte unter Nebenbedingungen	415
Nebenbedingung mithilfe des Lagrangeschen Ansatzes lösen	415
Nebenbedingung mithilfe des Einsetzverfahrens lösen	418
Kopf an Kopf Rennen – beide Verfahren im direkten Vergleich	419

Kapitel 20

Grundlagen der Differentialgleichungen 425

Einführende Gedanken zu Differentialgleichungen	425
Mit Isoklinen zur Lösung	426
Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit	428
Einfache Spezialfälle von Differentialgleichungen	429
Der einfachste Fall: $y' = f(x)$	429
Der Fall: $y' = f(x) \cdot g(y)$ – Trennung der Variablen	429
Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	431
Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	431
Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	432
Praktische Lösungsmethode: Variation der Konstanten	433
Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung	434
Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	436
Inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	439
Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	440
Äquivalenz einer Differentialgleichung n -ter Ordnung mit einem System erster Ordnung	441
Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung lösen	442
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	442
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	443
Spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung	444
Anwendungen in der Schwingungslehre	446

Teil VII

Der Top-Ten-Teil 449

Kapitel 21

Zehn Ratschläge für einen erfolgreichen Abschluss Ihres Mathekurses 451

Der Kurs beginnt pünktlich in der ersten Vorlesung	451
Besuchen Sie die Vorlesungen und Übungen	451
Verschaffen Sie sich ordentliche Mitschriften	452
Schauen Sie auch in die Bücher	452
Lösen Sie die wöchentlichen Übungsaufgaben	452

Gruppenarbeit nicht ausnutzen	452
Lernen Sie nicht nur für die Klausur	453
Klausurvorbereitung beginnt nicht einen Tag vorher	453
Aus Fehlern lernen	453
Der eigene Kurs ist immer der wichtigste!	454
Zu guter Letzt ...	454

Stichwortverzeichnis	455
-----------------------------	------------