

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Inhaltsverzeichnis	9
1 Theorie und Wirklichkeit	15
1.1 Systematik der Wissenschaften	15
1.2 Wo findet sich hier die Aktuarwissenschaft?	16
1.3 Wahrscheinlichkeitsbasierte Sicherheitskonzepte	17
1.4 Wechselwirkung von Modell und Wirklichkeit	18
1.5 Bewertung von Verpflichtungen: Buchwerte und Marktwerte	18
1.6 Regelbasierte versus prinzipienbasierte Anforderungen	19
1.7 Mathematische Korrektheit versus Verständlichkeit und Interpretierbarkeit für Anwender	21
1.8 Theorie und Wirklichkeit	22
1.9 Betriebswirtschaftliche Theorie und Unternehmenswirklichkeit	23
1.10 Was soll in einem Unternehmen bewertet werden?	25
1.11 Die unterschiedlichen Bewertungssichten	27
1.12 Mathematik und Unternehmensbewertung	31
1.13 Verwendete mathematische Hilfsmittel	32
1.14 Übungsaufgaben und Fragen	34
1.15 Literatur	34
2 Bewertungen	35
2.1 Bewertung von Wirtschaftsgütern	35
2.2 Übersicht zu Bewertungsarten	36
2.3 Cashflows	37
2.4 Die wichtigsten Standard-Cashflows generell und speziell bei Lebensversicherungen	38
2.5 Übungsaufgaben/Fragen	44
2.6 Literatur	44
3 Duration, Konvexität und Dispersion	45
3.1 Duration und Ableitung des Barwertes nach dem Diskontierungszins	45
3.2 Duration von ewigen und temporären Renten (Zeitrenten)	48
3.3 Konvexität, Dispersion und Taylor-Reihen	49
3.3.1 Konvexität	49
3.3.2 Dispersion	50
3.3.3 Die Ableitung der Duration und die Dispersion	51
3.3.4 Konvexität und Dispersion bei Zeitrenten für den Zinssatz $i_0 = 0$	52
3.3.5 Näherungsformel für jährliche Amortisationsbeträge	53
3.3.6 Rekursive Berechnung des Zinssatzes	55
3.3.7 Grafik zur Abhängigkeit des Barwertes vom Zinssatz	56

3.4	Taylor-Reihen und wiederholtes Aufsummieren der diskontierten Cashflow-Zahlungen	57
3.5	Duration und Konvexität bei Rentenbarwerten in der Lebensversicherung	60
3.6	Übungsaufgaben und Fragen.	63
3.7	Literatur.	64
4	Zinssensitivität	67
4.1	Exponentialdarstellung der Zinsvariation	67
4.1.1	Ableitungen	67
4.1.2	Integrale	68
4.1.3	Frühere Beispiele, neu betrachtet in der Exponentialdarstellung	68
4.1.4	Generelle Bemerkungen.	70
4.2	Reserveänderung bei Zinsvariation in der Lebensversicherung	71
4.2.1	Prämien- und Leistungs-Cashflows.	71
4.2.2	Differentialgleichung	71
4.2.3	Beispiel 4.1 für eine aufgeschobene Rente	72
4.2.4	Integral zur Bestimmung der Reserveauffüllung	74
4.2.5	Zinssensitivität bei einzelnen Produkten in der Lebensversicherung.	75
4.2.6	Beispiel 4.2 für die Reserveerhöhung bei einem Leibrentenportefeuille. .	75
4.3	Zinssatzvariation: Prämie bei gleicher Leistung resp. Leistung bei gleicher Prämie	79
4.3.1	Differentialgleichung	79
4.3.2	Integral	80
4.4	Sparprozess	80
4.4.1	Beispiele 4.4 a-e für die Änderung der Versicherungssumme bei Zinsreduktion	82
4.4.2	Darstellung der Zinssensitivität von Prämien und Leistungen	88
4.5	Übungsaufgaben und Fragen.	89
4.6	Literatur	90
5	Zinssensitivität von Leibrenten und Sterblichkeitsannahmen	91
5.1	Barwert und Duration von Leibrenten-Cashflows	91
5.1.1	Kontinuierliche Rentenzahlung.	91
5.1.2	Linear fallende diskontierte Rentenzahlung, Sterbegesetz nach de Moivre	92
5.1.3	Sterbegesetze von Gompertz und Makeham und die Gamma-Verteilung	93
5.1.4	Übergang zum kontinuierlichen Fall	95
5.1.5	Sterblichkeitsintensität und mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit .	96
5.1.6	Rentenbarwerte im kontinuierlichen Fall	97
5.1.7	Berechnung der Rentenbarwerte im Modell von Makeham mit der Gammaverteilung.	98
5.1.8	Die Lebenserwartung beim Gompertzschen Sterbegesetz.	99
5.1.9	Herleitung der Restterme bei der Lebenserwartung beim Gompertzschen Sterbegesetz	102

5.1.10	Duration von Rentenbarwerten beim Gompertzschen SterbeGesetz . . .	103
5.1.11	Herleitung der Näherungsformel $D_N(\bar{e}_x^G)$ für $D(\bar{e}_x^G)$	104
5.1.12	Übergang vom Gompertzschen zum Makehamschen SterbeGesetz . . .	105
5.1.13	Erläuterungen zu dem nachfolgend aufgeführten Beispiel und zu den Abbildungen.	106
5.1.14	Grafiken zu Beispiel 5.1.	110
5.2	Die Rentenhöhe in Abhängigkeit vom Zinssatz	114
5.2.1	Ableitung des Rentensatzes und der Duration	114
5.2.2	Begrenzung der Ableitung des Rentensatzes nach dem Zinssatz	115
5.2.3	Abhängigkeit des Rentensatzes vom Zinssatz.	115
5.3	Grafische Darstellung	116
5.4	Berücksichtigung diskreter Zahlungen	119
5.4.1	Unterjährige Rentenzahlung.	119
5.4.2	Prämien- und Rentenübertrag	120
5.4.3	Couponzahlung, Stückzinsen und Theta bei Anleihen	123
5.4.4	Theta bei Anleihen	125
5.5	Übungsaufgaben und Fragen.	126
5.6	Literatur.	127
6	Solvency II und die Aggregation verschiedener Risiken	129
6.1	Ermittlung des vorhandenen Risikokapitals („Eigenmittel“)	129
6.2	Ermittlung des Solvenzkapitals	131
6.3	Risikobegriff, Aggregation von Risiken.	132
6.3.1	Risikobegriff	132
6.3.2	Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Korrelation.	134
6.3.3	Aggregieren von Risiken, Vektoraddition und Kosinussatz.	138
6.4	Korrelationsmatrizen in Solvency II	139
6.5	Cholesky-Zerlegung	142
6.5.1	Cholesky-Zerlegung der Korrelationsmatrix für die Basissolvenzanforderungen	142
6.5.2	Cholesky- Zerlegung im Allgemeinen	146
6.6	Risikobaum in Solvency II	147
6.7	Risikolandkarte für Solvency II im Standardmodell:	150
6.7.1	Risikobaum	150
6.7.2	Vorgaben der EIOPA zur Bestimmung der Einzelrisiken	151
6.8	Solvenzvorschriften in den USA.	152
6.8.1	Statutarische und marktnahe Bilanz.	152
6.8.2	Quadratwurzelformeln	153
6.8.3	Interpretation der Quadratwurzelformeln mit der Vektoraddition	155
6.9	Solvenzvorschriften in der Schweiz.	156
6.9.1	Risikokomponenten und deren Ermittlung bei Lebensversicherungen . .	156
6.9.2	Risikomessung beim SST und bei Solvency II	159
6.9.3	Die SST-Anforderungen bei Nichtlebensversicherungen	160
6.10	Übungsaufgaben und Fragen.	160

6.11	Literatur	161
7	Portfoliotheorie	163
7.1	Bedeutung und Historisches	163
7.2	Beispiele für zwei Anlageklassen	164
7.3	Einführung eines weiteren Kriteriums mit unterschiedlichen Renditen	171
7.4	Erweiterung auf beliebig viele Anlageklassen	173
7.5	Berechnungen von effizienten Portfolios bei mehr als zwei Anlageklassen ...	175
7.5.1	Generelle Lösung	175
7.6	CAPM, der Beta-Faktor von Aktien und die Sharpe Ratio	183
7.6.1	CAPM und der β -Faktor von Aktien	183
7.6.2	Nachweis der mit dem β -Faktor gegebenen Beziehung zwischen Rendite und Risiko	183
7.6.3	„Sharpe Ratio“ von Portfolios	185
7.7	Ökonomisches Weltbild der Portfoliotheorie: Affinitäten und Unterschiede zu Solvency II	185
7.8	Übungsaufgaben und Fragen	187
7.9	Literatur	188
8	Finanzmarktinstrumente	189
8.1	Begriffe	189
8.2	Preisgefüge bei Derivaten (Optionen etc.)	189
8.3	Gegenüberstellung der Begriffe	192
8.4	Stochastische Analysis für Praktiker	194
8.4.1	Die drei Basispunkte	194
8.4.2	Brownsche Bewegung	196
8.4.3	Brownsche Bewegung in der Thermodynamik	199
8.4.4	Modell der Aktienkursentwicklung	202
8.4.5	Formel von Itô	203
8.4.6	Geometrische und arithmetische Renditen	208
8.4.7	(Einfache) Brownsche Bewegung und geometrische Brownsche Bewegung	209
8.4.8	Die Differentialgleichung von Black und Scholes zum Preis von Optionen	211
8.4.9	Übergang von Zufallsvariablen zu partiellen Differentialgleichungen ...	214
8.4.10	Die Formeln von Black und Scholes für die Preisbestimmung von Optionen	215
8.5	Put-Call-Parität, „Griechen“, Delta Hedging und generelle Bemerkungen ...	218
8.5.1	Preis der Put-Option aus der Put-Call-Parität	218
8.5.2	Griechen	221
8.5.3	Delta Hedging	224
8.5.4	Bemerkungen zur Formel von Black und Scholes	225
8.6	Übungsaufgaben und Fragen	227
8.7	Literatur	227

9	Stochastische Zinsmodelle	229
9.1	Vergleich von stochastischen Modellen zur Aktien- und Zinsentwicklung	229
9.2	Stochastische Modelle zur Entwicklung der Zinsintensität (short rate, instantaneous rate)	230
9.2.1	Stochastische Differentialgleichungen	230
9.2.2	Lösungen der Differentialgleichungen im Modell von Vasicek	232
9.2.3	Bewertung von Zerobonds beim Zinsmodell von Vasicek	234
9.3	Einfluss der Volatilität auf die erwartete Verzinsung	238
9.3.1	Modell von Vasicek mit Kontraktion des Zinsprozesses	238
9.3.2	Vergleich mit volatiler Jahresverzinsung	239
9.3.3	Spot- und Forward-Preise und Zinsintensitäten	240
9.3.4	Konvexitätsanpassung zwischen „Forward-“ und „Future-Rate“	243
9.3.5	Allgemeine Bemerkungen	245
9.4	Bewertung von Zinsoptionen	246
9.4.1	Generelles	246
9.4.2	Erwartete Rendite, Wachstum des Preises der Anleihe resp. der Aktie	247
9.4.3	Volatilität	248
9.4.4	Bedeutung von Zinsoptionen und Zinsvolatilität für die Beurteilung des Finanzrisikos	249
9.4.5	Vergleich von Optionen auf Anleihen mit Optionen auf Aktien	251
9.4.6	Formel von Black	252
9.4.7	Unterschiede zwischen der Formel von Black und Scholes und der Formel von Black	253
9.4.8	Zinsswaps	253
9.4.9	Swaptions und deren Bewertung nach dem Modell von Black	254
9.5	Übungsaufgaben und Fragen	256
10	Glossar, Lösungen	259
10.1	Finanzbegriffe	259
10.2	Bilanz-, Aufsichts- und Versicherungsbegriffe	260
10.3	Lösungen	264
11	Index	283