

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Reelle Zahlen	1
1.1.1 Die Zahlengerade	1
1.1.2 Rechnen mit reellen Zahlen	4
1.1.3 Ordnung der reellen Zahlen und ihre Vollständigkeit	8
1.1.4 Mengenschreibweise	11
1.1.5 Vollständige Induktion	17
1.1.6 Potenzen, Wurzeln, Absolutbetrag	21
1.1.7 Summenformeln: geometrische, binomische, polynomische	24
1.2 Elementare Kombinatorik	31
1.2.1 Fragestellungen der Kombinatorik	31
1.2.2 Permutationen	31
1.2.3 Permutationen mit Identifikationen	32
1.2.4 Variationen ohne Wiederholungen	34
1.2.5 Variationen mit Wiederholungen	37
1.2.6 Kombinationen ohne Wiederholungen	38
1.2.7 Kombinationen mit Wiederholungen	39
1.2.8 Zusammenfassung	41
1.3 Funktionen	42
1.3.1 Beispiele	42
1.3.2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen	44
1.3.3 Tabellen, graphische Darstellungen, Monotonie	46
1.3.4 Umkehrfunktion, Verkettungen	51
1.3.5 Allgemeiner Abbildungsbegriff	54
1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen	56
1.4.1 Definition und Beispiele	56
1.4.2 Nullfolgen	57
1.4.3 Konvergente Folgen	60
1.4.4 Ermittlung von Grenzwerten	62
1.4.5 Häufungspunkte, beschränkte Folgen	66
1.4.6 Konvergenzkriterien	68
1.4.7 Lösen von Gleichungen durch Iteration	71
1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen	74
1.5.1 Konvergenz unendlicher Reihen	74
1.5.2 Allgemeine Konvergenzkriterien	79
1.5.3 Absolut konvergente Reihen	82
1.5.4 Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen	85
1.6 Stetige Funktionen	89

1.6.1	Problemstellung: Lösen von Gleichungen	89
1.6.2	Stetigkeit	91
1.6.3	Zwischenwertsatz	94
1.6.4	Regeln für stetige Funktionen	97
1.6.5	Maximum und Minimum stetiger Funktionen	99
1.6.6	Gleichmäßige Stetigkeit	102
1.6.7	Grenzwerte von Funktionen	105
1.6.8	Pole und Grenzwerte im Unendlichen	109
1.6.9	Einseitige Grenzwerte, Unstetigkeiten	112
2	Elementare Funktionen	115
2.1	Polynome	115
2.1.1	Allgemeines	115
2.1.2	Geraden	116
2.1.3	Quadratische Polynome, Parabeln	121
2.1.4	Quadratische Gleichungen	126
2.1.5	Berechnung von Polynomwerten, Horner-Schema	128
2.1.6	Division von Polynomen, Anzahl der Nullstellen	132
2.2	Rationale und algebraische Funktionen	135
2.2.1	Gebrochene rationale Funktionen	135
2.2.2	Algebraische Funktionen	139
2.2.3	Kegelschnitte	143
2.3	Trigonometrische Funktionen	147
2.3.1	Bogenlänge am Einheitskreis	147
2.3.2	Sinus und Cosinus	154
2.3.3	Tangens und Cotangens	158
2.3.4	Arcus-Funktionen	161
2.3.5	Anwendungen: Entfernungsbestimmung, Schwingungen	164
2.4	Exponentialfunktionen, Logarithmus, Hyperbelfunktionen	169
2.4.1	Allgemeine Exponentialfunktionen	169
2.4.2	Wachstumsvorgänge. Die Zahl e	172
2.4.3	Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ und der natürliche Logarithmus	175
2.4.4	Hyperbel- und Areafunktionen	180
2.5	Komplexe Zahlen	183
2.5.1	Einführung	183
2.5.2	Der Körper der komplexen Zahlen	184
2.5.3	Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen	191
2.5.4	Polarkoordinaten, geometrische Deutung der komplexen Multiplikation, Zeigerdiagramm	193
2.5.5	Fundamentalsatz der Algebra, Folgen und Reihen, stetige Funktionen im Komplexen	196
3	Differentialrechnung einer reellen Variablen	199
3.1	Grundlagen der Differentialrechnung	199
3.1.1	Geschwindigkeit	199

3.1.2	Differenzierbarkeit, Tangenten	202
3.1.3	Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Quotienten reeller Funktionen	211
3.1.4	Kettenregel, Regel für Umkehrfunktionen, implizites Differenzieren	214
3.1.5	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	220
3.1.6	Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen	223
3.1.7	Ableitungen der Exponential- und Logarithmus-Funktionen	226
3.1.8	Ableitungen der Hyperbel- und Area-Funktionen	230
3.1.9	Zusammenstellung der wichtigsten Differentiationsregeln	230
3.2	Ausbau der Differentialrechnung	232
3.2.1	Die Regeln von de l'Hospital	232
3.2.2	Die Taylorsche Formel	237
3.2.3	Beispiele zur Taylorformel	240
3.2.4	Zusammenstellung der Taylorreihen elementarer Funktionen	246
3.2.5	Berechnung von π	249
3.2.6	Konvexität, geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung	250
3.2.7	Das Newtonsche Verfahren	255
3.2.8	Bestimmung von Extremstellen	261
3.2.9	Kurvendiskussion	266
3.3	Anwendungen	273
3.3.1	Bewegung von Massenpunkten	273
3.3.2	Fehlerabschätzung	277
3.3.3	Zur binomischen Reihe: physikalische Näherungsformeln	278
3.3.4	Zur Exponentialfunktion: Wachsen und Abklingen	279
3.3.5	Zum Newtonschen Verfahren	282
3.3.6	Extremalprobleme	284
4	Integralrechnung einer reellen Variablen	289
4.1	Grundlagen der Integralrechnung	290
4.1.1	Flächeninhalt und Integral	290
4.1.2	Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen	294
4.1.3	Graphisches Integrieren, Riemannsche Summen, numerische Integration mit der Tangentenformel	296
4.1.4	Regeln für Integrale	300
4.1.5	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	303
4.2	Berechnung von Integralen	306
4.2.1	Unbestimmte Integrale, Grundintegrale	306
4.2.2	Substitutionsmethode	309
4.2.3	Produktintegration	318
4.2.4	Integration rationaler Funktionen	323
4.2.5	Integration weiterer Funktionenklassen	328
4.2.6	Numerische Integration	331
4.3	Uneigentliche Integrale	336
4.3.1	Definition und Beispiele	336
4.3.2	Rechenregeln und Konvergenzkriterien	339
4.3.3	Integralkriterium für Reihen	346

4.3.4	Die Integralfunktionen Ei , Li , si , ci , das Fehlerintegral und die Gammafunktion	349
4.4	Anwendung: Wechselstromrechnung	353
4.4.1	Mittelwerte in der Wechselstromtechnik	353
4.4.2	Komplexe Funktionen einer reellen Variablen	355
4.4.3	Komplexe Wechselstromrechnung	359
4.4.4	Ortskurven bei Wechselstromschaltungen	364
5	Folgen und Reihen von Funktionen	369
5.1	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen	369
5.1.1	Gleichmäßige und punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen	369
5.1.2	Vertauschung von Grenzprozessen	373
5.1.3	Gleichmäßig konvergente Reihen	376
5.2	Potenzreihen	379
5.2.1	Konvergenzradius	379
5.2.2	Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen sowie Differenzieren und Integrieren	383
5.2.3	Identitätssatz, Abelscher Grenzwertsatz	384
5.3	Der Weierstraß'sche Approximationssatz	387
5.3.1	Bemerkung zur Polynomapproximation	387
5.3.2	Approximation von stetigen Funktionen durch Bernstein-Polynome	388
5.4	Interpolation	393
5.4.1	Polynominterpolation	393
5.4.2	Splineinterpolation	410
5.5	Fourierreihen	419
5.5.1	Periodische Funktionen	419
5.5.2	Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten	420
5.5.3	Beispiele für Fourierreihen	422
5.5.4	Konvergenz von Fourierreihen	430
5.5.5	Komplexe Schreibweise von Fourierreihen	435
5.5.6	Anwendung: Gedämpfte erzwungene Schwingung	438
6	Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler	443
6.1	Der n -dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$	443
6.1.1	Spaltenvektoren	443
6.1.2	Arithmetik im $\mathbb{R}^n$	444
6.1.3	Folgen und Reihen von Vektoren	450
6.1.4	Topologische Begriffe	452
6.1.5	Matrizen	455
6.2	Abbildungen im $\mathbb{R}^n$	459
6.2.1	Abbildungen aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$	459
6.2.2	Funktionen zweier reeller Variabler	460
6.2.3	Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$	466
6.3	Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen	468
6.3.1	Partielle Ableitungen	468
6.3.2	Ableitungsmatrix, Differenzierbarkeit, Tangentialebene	472

6.3.3	Regeln für differenzierbare Abbildungen. Richtungsableitung	478
6.3.4	Das vollständige Differential	482
6.3.5	Höhere partielle Ableitungen	486
6.3.6	Taylorformel und Mittelwertsatz	488
6.4	Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen	491
6.4.1	Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$	491
6.4.2	Satz über implizite Funktionen, Invertierungssatz	496
6.4.3	Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen	501
6.4.4	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen	504
7	Integralrechnung mehrerer reeller Variabler	511
7.1	Integration bei zwei Variablen	511
7.1.1	Anschauliche Einführung des Integrals zweier reeller Variabler	511
7.1.2	Analytische Einführung des Integrals zweier reeller Variabler	521
7.1.3	Grundlegende Sätze	525
7.1.4	Riemannsche Summen	531
7.1.5	Anwendungen	533
7.1.6	Krummlinige Koordinaten, Transformationen, Funktionaldeterminanten	540
7.1.7	Transformationsformel für Bereichsintegrale	545
7.2	Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen	551
7.2.1	Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$	551
7.2.2	Grundlegende Sätze	554
7.2.3	Krummlinige Koordinaten, Funktionaldeterminante, Transformationsformeln	556
7.2.4	Rauminhalte	562
7.2.5	Rotationskörper	565
7.2.6	Anwendungen: Schwerpunkte, Trägheitsmomente	568
7.3	Parameterabhängige Integrale	576
7.3.1	Stetigkeit und Integrierbarkeit parameterabhängiger Integrale	576
7.3.2	Differentiation eines parameterabhängigen Integrals	577
7.3.3	Differentiation bei variablen Integrationsgrenzen	578
Anhang		581
A	Lösungen zu den Übungen	583
Symbole		589
Literaturverzeichnis		591
Stichwortverzeichnis		595