

Inhaltsverzeichnis

1.	Mengen und Zahlen	13
1.1.	Klassen und Mengen, Relationen und Funktionen	13
1.2.	Zahlen und Folgen	19
1.2.1.	Natürliche Zahlen	20
1.2.2.	Ganze Zahlen	21
1.2.3.	Rationale Zahlen	21
1.2.4.	Reelle Zahlen	22
1.2.5.	Komplexe Zahlen	29
1.3.	Kombinatorik	32
1.3.1.	Permutationen	32
1.3.2.	Variationen und Kombinationen	33
1.4.	Aufgaben zu 1.1.—1.3.	35
2.	Reelle Funktionen reeller Veränderlicher	37
2.1.	Funktionen und ihre Darstellung	37
2.2.	Einfachste Funktionen.	48
2.2.1.	Rationale Funktionen	48
2.2.2.	Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen.	50
2.2.3.	Logarithmus	54
2.2.4.	Trigonometrische (Kreis-)Funktionen	57
2.2.5.	Zyklometrische Funktionen.	63
2.2.6.	Hyperbelfunktionen und ihre Umkehr	64
2.3.	Aufgaben zu 2.1.—2.2.	66
8.	Algebraische Gleichungen und Matrizen	67
3.1.	Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten	67
3.1.1.	Sätze über die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und deren Be- rechnung	68
3.2.	Lineare Gleichungssysteme	72
3.2.1.	Determinanten	72
3.2.2.	Auflösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Determinanten . . .	75
3.3.	Matrizen	76
3.3.1.	Allgemeine Definitionen und Verknüpfungsregeln	76
3.3.2.	Spezielle Matrizen	78

8	Inhaltsverzeichnis	
3.3.3.	Eigenwerte, Eigenvektoren	80
3.4.	Lineare Transformationen	83
3.4.1.	Allgemeines über Transformationen	83
3.4.2.	Orthogonale Transformationen	85
3.5.	Aufgaben zu 3.1.—3.4.	90
4.	Differentialrechnung	91
4.1.	Ableitung der Funktionen mit einer Veränderlichen	91
4.1.1.	Ableitung und Differentialquotient	91
4.1.2.	Differentiale als unendlich kleine Größen	95
4.1.3.	Differentialquotient einer Potenz mit beliebigem Exponenten	96
4.1.4.	Differentialquotient einer Funktion mit einem konstanten Koeffizienten und einer vielgliedrigen Summe	98
4.1.5.	Differentialquotient einer Exponentialfunktion	98
4.1.6.	Differentialquotienten trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen	99
4.1.7.	Differentialquotient eines Produkts und eines Quotienten	100
4.1.8.	Differentialquotient der Umkehrfunktion	102
4.1.9.	Stufenweise Differentiation (Kettenregel)	104
4.1.10.	Differentiation von Funktionen in Parameterdarstellung	108
4.1.11.	Ableitungen und Differentialquotienten höherer Ordnung	108
4.1.12.	Höhere Differentialquotienten einer Potenz	110
4.1.13.	Höhere Differentialquotienten exponentieller und trigonometrischer Funktionen	110
4.1.14.	Wiederholte Differentiation eines Produkts	111
4.1.15.	Höhere Differentialquotienten einer Funktion, die indirekt von der Veränderlichen abhängt	112
4.1.16.	Zweiter Differentialquotient für Funktionen in Parameterdarstellung	112
4.2.	Einige Anwendungen des Differentialquotienten	113
4.2.1.	Maxima und Minima einer Funktion	113
4.2.2.	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	116
4.2.3.	Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL zur Bestimmung von Grenzwerten	118
4.2.4.	TAYLORScher Satz	121
4.3.	Ableitung der Funktionen mit mehreren Veränderlichen	125
4.3.1.	Partielle Differentialquotienten und totales Differential	125
4.3.2.	Einfluß der Meßgenauigkeit auf das Endergebnis	129
4.3.3.	Höhere partielle Differentialquotienten	130
4.3.4.	Bedingungen dafür, daß $\varphi(x,y) dx + \psi(x,y) dy$ ein vollständiges Differen- tial ist	131
4.3.5.	Differentiation von Funktionen, wenn neue Veränderliche eingeführt werden	132
4.4.	Einige Anwendungen der partiellen Ableitungen	146
4.4.1.	TAYLORScher Satz für eine Funktion mit mehreren Veränderlichen	136
4.4.2.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher	137
4.4.3.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher bei Be- stehen von Nebenbedingungen	139
4.5.	Aufgaben zu 4.1.—4.4.	140

5.	Aus der analytischen Geometrie	143
5.1.	Lineare Gebilde	144
5.2.	Ebene Kurven, insbesondere Kurven zweiten Grades.	146
5.2.1.	Gleichungen der Tangente und Normale einer Kurve.	146
5.2.2.	Bogenelement einer Kurve	149
5.2.3.	Krümmung und Krümmungsradius	149
5.2.4.	Kreis	151
5.2.5.	Ellipse	151
5.2.6.	Hyperbel und Parabel	155
5.2.7.	Ausgeartete Kegelschnitte	159
5.2.8.	Diskussion der Kurven zweiten Grades. Hauptachsentransformation.	159
5.3.	Flächen zweiten Grades	165
5.3.1.	Rotationsflächen zweiten Grades	165
5.3.2.	Allgemeine Flächen zweiten Grades	168
5.4.	Aufgaben zu 5.1.—5.3.	171
6.	Integralrechnung	173
6.1.	Bestimmtes Integral	174
6.1.1.	Definition und Eigenschaften eines bestimmten Integrals	174
6.1.2.	Bogenlänge.	178
6.2.	Unbestimmtes Integral	179
6.2.1.	Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration.	179
6.2.2.	Stammfunktionen zu den einfachsten Funktionen	180
6.3.	Integrationsmethoden für analytisch auswertbare Integrale	182
6.3.1.	Integral einer Summe oder Differenz von Funktionen	182
6.3.2.	Partielle Integration	183
6.3.3.	Einführung einer neuen Veränderlichen	185
6.3.4.	Anwendung der Integrationsmethoden auf einige Funktionenklassen	188
6.4.	Einige Anwendungen der Integration	199
6.4.1.	Integraldarstellung des Restgliedes der TAYLORSchen Entwicklung	199
6.4.2.	Einige geometrische Anwendungen	200
6.5.	Uneigentliche Integrale, Parameterintegrale und Kurvenintegrale	202
6.6.	Mehrfache Integrale	211
6.6.1.	Doppelintegrale	211
6.6.2.	Dreifache Integrale	216
6.7.	Aufgaben zu 6.1.—6.6.	218
7.	Vektor- und Tensorrechnung	221
7.1.	Definition des Vektors und Tensors	221
7.2.	Vektoralgebra	227
7.2.1.	Addition, Subtraktion, lineare Abhängigkeit	227
7.2.2.	Skalares Produkt zweier Vektoren	229
7.2.3.	Vektorprodukt zweier Vektoren	231
7.2.4.	Mehrfache Produkte von Vektoren	234
7.2.5.	Einige Anwendungen	235

10	Inhaltsverzeichnis	
7.3.	Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen	238
7.3.1.	Differentialgeometrie der Raumkurven.	238
7.3.2.	Differentialgeometrie der Flächen	242
7.4.	Felder und Integralsätze	250
7.4.1.	Gradient	250
7.4.2.	Vektorfelder	252
7.4.3.	Rotation und Integralsatz von STOKES	256
7.4.4.	Divergenz und Integralsatz von GAUSS	260
7.4.5.	Sprungflächen	263
7.4.6.	Vektorumformungen.	265
7.4.7.	Vektoroperationen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten	266
7.4.8.	Vektoroperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	272
7.4.9.	Spezielle Vektorfelder	274
7.5.	Aufgaben zu 7.1.—7.4.	279
8.	Reihen, FOURIER-Integral und δ -Funktion	280
8.1.	Reihen.	280
8.2.	Potenzreihen	283
8.2.1.	Asymptotische Reihen	287
8.3.	FOURIERSche Reihen	290
8.4.	Vektorräume, Funktionenräume	297
8.4.1.	Vektorräume, HILBERT-Räume	297
8.4.2.	Integrationsräume.	301
8.4.3.	Lineare Operatoren	305
8.5.	FOURIER-Integral	306
8.6.	δ -Funktion	309
8.7.	Aufgaben zu 8.1.—8.6.	314
9.	Funktionen einer komplexen Veränderlichen.	316
9.1.	Ableitung, Integral und Reihen	316
9.1.1.	Ableitung einer komplexen Funktion	316
9.1.2.	Konforme Abbildung	318
9.1.3.	Anwendung der konformen Abbildung	321
9.1.4.	Integrale komplexer Funktionen	323
9.1.5.	Potenzreihe, TAYLORSche Reihe, Analytische Fortsetzung	325
9.1.6.	LAURENTSche Reihe, Residuum	329
9.1.7.	Anwendung des Residuensatzes	332
9.2.	LAPLACE-Transformation	335
9.2.1.	Operationen	336
9.2.2.	Korrespondenzen	340
9.3.	Aufgaben zu 9.1.—9.2.	343
10.	Gewöhnliche Differentialgleichungen und spezielle Funktionen	344
10.1.	Allgemeines über Differentialgleichungen	344
10.1.1.	Auftreten von Differentialgleichungen, ein Beispiel aus der Physik	344
10.1.2.	Einteilung der Differentialgleichungen	345

10.1.3.	Integrationskonstanten in den Lösungen von Differentialgleichungen.	345
10.2.	Differentialgleichungen erster Ordnung	347
10.2.1.	Graphische Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung	347
10.2.2.	Trennung der Veränderlichen	348
10.2.3.	Gleichungen mit totalen Differentialen	349
10.2.4.	Lineare Differentialgleichung erster Ordnung	350
10.3.	Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung	350
10.3.1.	Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.	351
10.3.2.	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.	352
10.3.3.	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.	357
10.3.4.	Nichtlineare Differentialgleichungen	362
10.4.	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.	363
10.5.	Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen.	366
10.5.1.	Zylinderfunktionen (BESSELSche Funktionen)	367
10.5.2.	Kugelfunktionen (LEGENDRESche Funktionen)	373
10.6.	Aufgaben zu 10.1.—10.5.	378
11.	Partielle Differentialgleichungen	380
11.1.	Differentialgleichungen erster Ordnung.	380
11.2.	Quasilineare und lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	383
11.2.1.	Charakteristikenmethode	383
11.2.2.	Randbedingungen	389
11.2.3.	Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen	390
11.3.	Quasilineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	391
11.4.	LAPLACESche und POISSONSche Differentialgleichung (Potentialtheorie)	393
11.4.1.	Lösung der LAPLACESchen Gleichung durch Produktansatz	393
11.4.2.	Anwendung der GREENSchen Formeln auf harmonische Funktionen	398
11.4.3.	Lösung der POISSONSchen Gleichung mit Hilfe der GREENSchen Funktion	399
11.5.	Wellengleichung.	403
11.6.	Diffusionsgleichung	407
11.7.	Aufgaben zu 11.1.—11.6.	409
12.	Lineare Integralgleichungen.	409
12.1.	FREDHOLMSche Integralgleichungen.	411
12.1.1.	Entwicklungen nach Eigenfunktionen	411
12.1.2.	Iterationsverfahren	413
12.2.	ABELSche Integralgleichung	415
12.3.	Aufgaben zu 12.1.—12.2.	417
13.	Variationsrechnung	417
13.1.	Variationsprobleme mit einer Funktion einer Veränderlichen	418
13.1.1.	Extremwerte von Integralen mit Nebenbedingungen	422

12	Inhaltsverzeichnis	
13.2.	Variationsprobleme mit mehreren Funktionen und Veränderlichen . . .	424
13.3.	Aufgaben zu 13.1.—13.2.	426
14.	Wahrscheinlichkeitsrechnung	425
14.1.	Wahrscheinlichkeit und Verteilungsfunktion	426
14.2.	Versuche mit abzählbarer Ereignismenge	429
14.2.1.	Binomische Verteilung	430
14.2.2.	Poisson-Verteilung	431
14.2.3.	Erwartungswerte, Momente.	432
14.3.	Versuche mit nichtabzählbarer Ereignismenge.	436
14.3.1.	Normalverteilung (GAUSS-Verteilung).	438
14.3.2.	Fehlerrechnung	439
14.4.	Aufgaben zu 14.1.—14.3.	442
15.	Numerische Methoden	443
15.1.	Auflösung linearer Gleichungssysteme	443
15.2.	Berechnung eines Polynomwerts	444
15.3.	Interpolation	444
15.3.1.	Polynome	444
15.3.2.	Harmonische Analyse	446
15.4.	Verbesserung einer annähernd bekannten Lösung der Gleichung $f(x) = 0$	448
15.5.	Differentiation und Integration	449
15.5.1.	Differentiation	449
15.5.2.	Integration	450
15.6.	Differentialgleichungen.	456
15.6.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen.	456
15.6.2.	Partielle Differentialgleichungen.	459
15.7.	Aufgaben zu 15.1.—15.6.	460
16.	Lösungen der Aufgaben	466
	Literaturhinweise.	483
	Sachverzeichnis	486