

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>5 Variationsrechnung und Physik</b>	<b>1</b>
5.1 Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen	2
5.1.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	2
5.1.2 Anwendungen	5
5.1.3 Die Hamiltonschen Gleichungen	12
5.1.4 Anwendungen	17
5.1.5 Hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum	20
5.1.6 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	23
5.1.7 Anwendungen	24
5.1.8 Natürliche Randbedingungen	27
5.2 Variationsrechnung für Funktionen mehrerer Variabler	29
5.2.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	29
5.2.2 Anwendungen	29
5.2.3 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	33
5.3 Steuerungsprobleme	34
5.3.1 Bellmansche dynamische Optimierung	35
5.3.2 Anwendungen	36
5.3.3 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip	37
5.3.4 Anwendungen	38
5.4 Extremwertaufgaben	40
5.4.1 Lokale Minimumprobleme	40
5.4.2 Globale Minimumprobleme und Konvexität	41
5.4.3 Anwendungen auf die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß	41
5.4.4 Anwendungen auf Pseudoinverse	42
5.4.5 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	43
5.4.6 Anwendungen auf die Entropie	44
5.4.7 Der Subgradient	45
5.4.8 Dualitätstheorie und Sattelpunkte	46
<b>Literatur zu Kapitel 5</b>	<b>47</b>
<b>6 Stochastik – Mathematik des Zufalls</b>	<b>49</b>
6.1 Elementare Stochastik	50
6.1.1 Das klassische Wahrscheinlichkeitsmodell	51
6.1.2 Das Gesetz der großen Zahl von Jakob Bernoulli	53
6.1.3 Der Grenzwertsatz von Moivre	54
6.1.4 Die Gaußsche Normalverteilung	55
6.1.5 Der Korrelationskoeffizient	57
6.1.6 Anwendungen auf die klassische statistische Physik	60
6.2 Die Kolmogorowschen Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	63
6.2.1 Das Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten	66
6.2.2 Zufällige Variable	70
6.2.3 Zufallsvektoren	76
6.2.4 Grenzwertsätze	81

6.2.5	Anwendungen auf das Bernoullische Modell für Folgen unabhängiger Versuche . . . . .	83
6.3	Mathematische Statistik . . . . .	91
6.3.1	Grundideen . . . . .	91
6.3.2	Wichtige Schätzfunktionen . . . . .	93
6.3.3	Die Untersuchung normalverteilter Messgrößen . . . . .	94
6.3.4	Die empirische Verteilungsfunktion . . . . .	97
6.3.5	Die Maximum-Likelihood-Methode zur Gewinnung von Parameterschätzungen . . . . .	103
6.3.6	Multivariate Analysen . . . . .	105
6.4	Stochastische Prozesse . . . . .	108
6.4.1	Zeitreihen . . . . .	109
6.4.2	Markowsche Ketten und stochastische Matrizen . . . . .	115
6.4.3	Poissonsche Prozesse . . . . .	117
6.4.4	Brownsche Bewegung und Diffusion . . . . .	118
6.4.5	Der Hauptsatz von Kolmogorow für allgemeine stochastische Prozesse . . . . .	122
	<b>Literatur zu Kapitel 6 . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>7</b>	<b>Numerik und Wissenschaftliches Rechnen . . . . .</b>	<b>127</b>
7.1	Numerisches Rechnen und Fehleranalyse . . . . .	128
7.1.1	Begriff des Algorithmus . . . . .	128
7.1.2	Zahldarstellung in Computern . . . . .	128
7.1.3	Fehlerquellen, Fehlererfassung, Kondition und Stabilität . . . . .	130
7.2	Lineare Algebra . . . . .	131
7.2.1	Lineare Gleichungssysteme – direkte Methoden . . . . .	131
7.2.2	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	136
7.2.3	Eigenwertprobleme . . . . .	136
7.2.4	Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	141
7.3	Interpolation, numerische Differentiation und Quadratur . . . . .	145
7.3.1	Interpolationspolynome . . . . .	145
7.3.2	Numerische Differentiation . . . . .	150
7.3.3	Numerische Quadratur . . . . .	150
7.4	Nichtlineare Probleme . . . . .	155
7.4.1	Nichtlineare Gleichungen . . . . .	155
7.4.2	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	157
7.4.3	Berechnung der Nullstellen von Polynomen . . . . .	159
7.5	Approximation . . . . .	161
7.5.1	Approximation im quadratischen Mittel . . . . .	161
7.5.2	Gleichmäßige Approximation . . . . .	165
7.5.3	Genäherte gleichmäßige Approximation . . . . .	166
7.6	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	167
7.6.1	Anfangswertprobleme . . . . .	167
7.6.2	Randwertprobleme . . . . .	176
7.7	Partielle Differentialgleichungen und Wissenschaftliches Rechnen . . . . .	179
7.7.1	Grundideen . . . . .	179
7.7.2	Diskretisierungsverfahren in der Übersicht . . . . .	180
7.7.3	Elliptische Differentialgleichungen . . . . .	184
7.7.4	Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	193
7.7.5	Hyperbolische Differentialgleichungen . . . . .	196
7.7.6	Adaptive Diskretisierungsverfahren . . . . .	203
7.7.7	Iterative Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	206
7.7.8	Randelementmethode . . . . .	215
7.7.9	Technik der hierarchischen Matrizen . . . . .	217

7.7.10	Harmonische Analyse . . . . .	219
7.7.11	Inverse Probleme . . . . .	229
<b>Literatur zu Kapitel 7 . . . . .</b>		<b>231</b>
<b>8</b>	<b>Wirtschafts- und Finanzmathematik</b>	<b>233</b>
8.1	Klassische Finanzmathematik und Anwendungen . . . . .	233
8.1.1	Lineare Verzinsung . . . . .	233
8.1.2	Zinseszinsrechnung (geometrische Verzinsung) . . . . .	234
8.1.3	Rentenrechnung . . . . .	236
8.1.4	Tilgungsrechnung . . . . .	238
8.1.5	Kursrechnung . . . . .	240
8.1.6	Barwerte und Renditen . . . . .	240
8.1.7	Zinsstrukturkurve . . . . .	242
8.1.8	Risikokennzahlen festverzinslicher Wertpapiere . . . . .	244
8.1.9	Risikokennzahlen und Rendite von Portfolios . . . . .	247
8.1.10	Finanzinnovationen . . . . .	248
8.2	Lebensversicherungsmathematik . . . . .	249
8.2.1	Versicherungsformen . . . . .	250
8.2.2	Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbetafeln . . . . .	250
8.2.3	Die Zahlungsströme eines Lebensversicherungsvertrages . . . . .	252
8.2.4	Die Bewertung von Zahlungsströmen und Lebensversicherungsverträgen . . . . .	254
8.2.5	Äquivalenzprinzip und Nettoprämie . . . . .	255
8.2.6	Prospektives Deckungskapital . . . . .	255
8.2.7	Prämienarten . . . . .	255
8.2.8	Der Satz von Hattendorf . . . . .	256
8.3	Schadenversicherungsmathematik . . . . .	257
8.3.1	Das kollektive Modell für eine Versicherungsperiode . . . . .	257
8.3.2	Berechnung der Gesamtschadenverteilung . . . . .	259
8.3.3	Ruintheorie, Cramér-Lundberg-Modell . . . . .	262
8.3.4	Rückversicherung und Risikoteilung . . . . .	266
8.3.5	Elemente der klassischen Extremwerttheorie . . . . .	266
8.4	Finanzmathematik in zeitlich diskreten Marktmodellen . . . . .	267
8.4.1	Wertanlagen, Handelsstrategien und Arbitrage . . . . .	267
8.4.2	Absicherung und arbitragefreie Bewertung von Optionen . . . . .	269
8.5	Finanzmathematik in zeitstetigen Marktmodellen . . . . .	273
8.5.1	Wertprozesse und Handelsstrategien . . . . .	273
8.5.2	Der Itô-Kalkül . . . . .	274
8.5.3	Das Black-Scholes-Modell . . . . .	277
8.6	Lineare Optimierung . . . . .	282
8.6.1	Primale und duale Aufgabe . . . . .	282
8.6.2	Primaler Simplexalgorithmus . . . . .	285
8.6.3	Innere-Punkte-Methode . . . . .	287
8.6.4	Parametrische lineare Optimierung . . . . .	289
8.6.5	Das klassische Transportproblem . . . . .	291
8.6.6	Das Engpasstransportproblem . . . . .	293
8.7	Nichtlineare Optimierung . . . . .	294
8.7.1	Optimalitätsbedingungen bei allgemeinen Nebenbedingungen . . . . .	296
8.7.2	Optimalitätsbedingungen bei expliziten Nebenbedingungen . . . . .	297
8.7.3	Lagrange-Dualität . . . . .	300
8.7.4	Sattelpunkte . . . . .	302
8.7.5	Lösung freier nichtlinearer Optimierungsaufgaben . . . . .	302
8.7.6	Lösung restringierter Optimierungsaufgaben . . . . .	303

8.8	Diskrete Optimierung . . . . .	305
8.8.1	Exakte Lösung von diskreten Optimierungsaufgaben . . . . .	306
8.8.2	Dualität . . . . .	310
8.8.3	Näherungsalgorithmen . . . . .	312
8.8.4	Matroide und der Greedy-Algorithmus . . . . .	312
8.8.5	Spezielle Probleme . . . . .	313
8.9	Optimierungsprobleme über Graphen . . . . .	314
8.9.1	Kürzeste Wege in gerichteten Graphen . . . . .	315
8.9.2	Minimalgerüste . . . . .	316
8.9.3	Flussprobleme . . . . .	317
8.9.4	Kostenminimale Flüsse . . . . .	319
8.9.5	Matchings minimalen Gewichtes . . . . .	320
8.9.6	Eulersche Graphen und das Problem des chinesischen Postboten . . . . .	322
8.9.7	Hamiltonkreise und das Rundreiseproblem . . . . .	323
8.10	Mathematische Spieltheorie . . . . .	325
8.10.1	Problemstellung . . . . .	325
8.10.2	Nash-Gleichgewicht . . . . .	325
8.11	Vektoroptimierung . . . . .	327
8.11.1	Problemstellung und grundlegende Begriffe . . . . .	327
8.11.2	Lineare Skalarisierung und Optimalitätsbedingungen . . . . .	331
8.11.3	Weitere Skalarisierungstechniken . . . . .	333
8.11.4	Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingungen . . . . .	334
8.11.5	Dualität . . . . .	335
8.12	Portfoliooptimierung . . . . .	336
8.12.1	Das Markowitz-Portfoliooptimierungsproblem . . . . .	337
8.12.2	Lineare Skalarisierung und eigentlich effiziente Portfolios . . . . .	338
8.12.3	Dualität und Optimalitätsbedingungen . . . . .	341
8.12.4	Erweiterungen . . . . .	341
8.13	Anwendungen der Differentialrechnung in den Wirtschaftswissenschaften . . . . .	342
8.13.1	Funktionswertänderungen bei Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	342
8.13.2	Funktionswertänderungen bei Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher . . . . .	346
8.13.3	Extremwertprobleme in den Wirtschaftswissenschaften . . . . .	347
	<b>Literatur zu Kapitel 8 . . . . .</b>	<b>350</b>
<b>9</b>	<b>Algorithmik und Informatik . . . . .</b>	<b>353</b>
9.1	Geschichte der Informatik . . . . .	353
9.2	Alphabete, Wörter, Sprachen und Aufgaben . . . . .	359
9.2.1	Zielsetzung . . . . .	359
9.2.2	Alphabete, Wörter und Sprachen . . . . .	360
9.2.3	Algorithmische Probleme . . . . .	364
9.3	Endliche Automaten . . . . .	371
9.3.1	Zielsetzung . . . . .	371
9.3.2	Die Darstellungen der endlichen Automaten . . . . .	372
9.3.3	Simulationen . . . . .	382
9.3.4	Beweise der Nichtexistenz . . . . .	385
9.3.5	Nichtdeterminismus . . . . .	390
9.4	Turingmaschinen . . . . .	397
9.4.1	Zielsetzung . . . . .	397
9.4.2	Das Modell der Turingmaschine . . . . .	398
9.4.3	Mehrband-Turingmaschinen und Churchsche These . . . . .	405
9.4.4	Nichtdeterministische Turingmaschinen . . . . .	412

9.4.5	Kodierung von Turingmaschinen . . . . .	416
9.5	Berechenbarkeit . . . . .	417
9.5.1	Zielsetzung . . . . .	417
9.5.2	Die Methode der Diagonalisierung . . . . .	418
9.5.3	Die Methode der Reduktion . . . . .	424
9.5.4	Satz von Rice . . . . .	432
9.6	Komplexitätstheorie . . . . .	435
9.6.1	Zielsetzung . . . . .	435
9.6.2	Komplexitätsmaße . . . . .	436
9.6.3	Komplexitätsklassen und die Klasse P . . . . .	441
9.6.4	Nichtdeterministische Komplexitätsmaße . . . . .	444
9.6.5	Die Klasse NP und Beweisverifikation . . . . .	447
9.6.6	NP-Vollständigkeit . . . . .	450
9.7	Algorithmik für schwere Probleme . . . . .	465
9.7.1	Zielsetzung . . . . .	465
9.7.2	Approximationsalgorithmen . . . . .	466
9.7.3	Lokale Suche . . . . .	471
9.7.4	Simulated Annealing . . . . .	474
9.8	Randomisierung . . . . .	476
9.8.1	Zielsetzung . . . . .	476
9.8.2	Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	478
9.8.3	Ein randomisiertes Kommunikationsprotokoll . . . . .	480
9.8.4	Die Methode der Fingerabdrücke und die Äquivalenz von zwei Polynomen . . . . .	483
9.9	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	487
9.10	Unschärfe Mengen und Fuzzy-Methoden . . . . .	490
9.10.1	Unschärfe und mathematische Modellierung . . . . .	490
9.10.2	Mengenalgebra . . . . .	491
9.10.3	Unschärfe Zahlen und ihre Arithmetik . . . . .	502
9.10.4	Unschärfe Variable . . . . .	508
9.10.5	Unschärfe Relationen . . . . .	509
9.10.6	Unschärfemaße . . . . .	511
9.10.7	Wahrscheinlichkeiten unscharfer Ereignisse . . . . .	513
9.10.8	Unschärfe Maße . . . . .	514
	Literatur zu Kapitel 9 . . . . .	515
	Index . . . . .	519