

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

v

<b>5</b>	<b>Variationsrechnung und Physik</b>	<b>1</b>
5.1	Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen . . . . .	2
5.1.1	Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen . . . . .	2
5.1.2	Anwendungen . . . . .	5
5.1.3	Die Hamiltonschen Gleichungen . . . . .	12
5.1.4	Anwendungen . . . . .	17
5.1.5	Hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum . . . . .	20
5.1.6	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren . . . . .	23
5.1.7	Anwendungen . . . . .	24
5.1.8	Natürliche Randbedingungen . . . . .	27
5.2	Variationsrechnung für Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	29
5.2.1	Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen . . . . .	29
5.2.2	Anwendungen . . . . .	29
5.2.3	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren . . . . .	33
5.3	Steuerungsprobleme . . . . .	34
5.3.1	Bellmansche dynamische Optimierung . . . . .	35
5.3.2	Anwendungen . . . . .	36
5.3.3	Das Pontrjaginsche Maximumprinzip . . . . .	37
5.3.4	Anwendungen . . . . .	38
5.4	Extremwertaufgaben . . . . .	40
5.4.1	Lokale Minimumprobleme . . . . .	40
5.4.2	Globale Minimumprobleme und Konvexität . . . . .	41
5.4.3	Anwendungen auf die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß . . . . .	41
5.4.4	Anwendungen auf Pseudoinverse . . . . .	42
5.4.5	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren . . . . .	43
5.4.6	Anwendungen auf die Entropie . . . . .	44
5.4.7	Der Subgradient . . . . .	45
5.4.8	Dualitätstheorie und Sattelpunkte . . . . .	46
<b>Literatur zu Kapitel 5 . . . . .</b>		<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Stochastik – Mathematik des Zufalls</b>	<b>49</b>
6.1	Elementare Stochastik . . . . .	50
6.1.1	Das klassische Wahrscheinlichkeitsmodell . . . . .	51
6.1.2	Das Gesetz der großen Zahl von Jakob Bernoulli . . . . .	53
6.1.3	Der Grenzwertsatz von Moivre . . . . .	54
6.1.4	Die Gaußsche Normalverteilung . . . . .	55
6.1.5	Der Korrelationskoeffizient . . . . .	57
6.1.6	Anwendungen auf die klassische statistische Physik . . . . .	60
6.2	Die Kolmogorowschen Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	63
6.2.1	Das Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten . . . . .	66
6.2.2	Zufällige Variable . . . . .	70
6.2.3	Zufallsvektoren . . . . .	76
6.2.4	Grenzwertsätze . . . . .	81

6.2.5	Anwendungen auf das Bernoullische Modell für Folgen unabhängiger Versuche . . . . .	83
6.3	Mathematische Statistik . . . . .	91
6.3.1	Grundideen . . . . .	91
6.3.2	Wichtige Schätzfunktionen . . . . .	93
6.3.3	Die Untersuchung normalverteilter Messgrößen . . . . .	94
6.3.4	Die empirische Verteilungsfunktion . . . . .	97
6.3.5	Die Maximum-Likelihood-Methode zur Gewinnung von Parameterschätzungen . . . . .	103
6.3.6	Multivariate Analysen . . . . .	105
6.4	Stochastische Prozesse . . . . .	108
6.4.1	Zeitreihen . . . . .	109
6.4.2	Markowsche Ketten und stochastische Matrizen . . . . .	115
6.4.3	Poissonsche Prozesse . . . . .	117
6.4.4	Brownsche Bewegung und Diffusion . . . . .	118
6.4.5	Der Hauptsatz von Kolmogorow für allgemeine stochastische Prozesse . . . . .	122
<b>Literatur zu Kapitel 6 . . . . .</b>		124
<b>7</b>	<b>Numerik und Wissenschaftliches Rechnen</b>	<b>127</b>
7.1	Numerisches Rechnen und Fehleranalyse . . . . .	128
7.1.1	Begriff des Algorithmus . . . . .	128
7.1.2	Zahldarstellung in Computern . . . . .	128
7.1.3	Fehlerquellen, Fehlererfassung, Kondition und Stabilität . . . . .	130
7.2	Lineare Algebra . . . . .	131
7.2.1	Lineare Gleichungssysteme – direkte Methoden . . . . .	131
7.2.2	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	136
7.2.3	Eigenwertprobleme . . . . .	136
7.2.4	Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	141
7.3	Interpolation, numerische Differentiation und Quadratur . . . . .	145
7.3.1	Interpolationspolynome . . . . .	145
7.3.2	Numerische Differentiation . . . . .	150
7.3.3	Numerische Quadratur . . . . .	150
7.4	Nichtlineare Probleme . . . . .	155
7.4.1	Nichtlineare Gleichungen . . . . .	155
7.4.2	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	157
7.4.3	Berechnung der Nullstellen von Polynomen . . . . .	159
7.5	Approximation . . . . .	161
7.5.1	Approximation im quadratischen Mittel . . . . .	161
7.5.2	Gleichmäßige Approximation . . . . .	165
7.5.3	Genäherte gleichmäßige Approximation . . . . .	166
7.6	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	167
7.6.1	Anfangswertprobleme . . . . .	167
7.6.2	Randwertprobleme . . . . .	176
7.7	Partielle Differentialgleichungen und Wissenschaftliches Rechnen . . . . .	179
7.7.1	Grundideen . . . . .	179
7.7.2	Diskretisierungsverfahren in der Übersicht . . . . .	180
7.7.3	Elliptische Differentialgleichungen . . . . .	184
7.7.4	Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	193
7.7.5	Hyperbolische Differentialgleichungen . . . . .	196
7.7.6	Adaptive Diskretisierungsverfahren . . . . .	203
7.7.7	Iterative Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	206
7.7.8	Randelementmethode . . . . .	215
7.7.9	Technik der hierarchischen Matrizen . . . . .	217

7.7.10	Harmonische Analyse . . . . .	219
7.7.11	Inverse Probleme . . . . .	229
<b>Literatur zu Kapitel 7 . . . . .</b>		<b>231</b>
<b>8</b>	<b>Wirtschafts- und Finanzmathematik</b>	<b>233</b>
8.1	Klassische Finanzmathematik und Anwendungen . . . . .	233
8.1.1	Lineare Verzinsung . . . . .	233
8.1.2	Zinseszinsrechnung (geometrische Verzinsung) . . . . .	234
8.1.3	Rentenrechnung . . . . .	236
8.1.4	Tilgungsrechnung . . . . .	238
8.1.5	Kursrechnung . . . . .	240
8.1.6	Barwerte und Renditen . . . . .	240
8.1.7	Zinsstrukturkurve . . . . .	242
8.1.8	Risikokennzahlen festverzinslicher Wertpapiere . . . . .	244
8.1.9	Risikokennzahlen und Rendite von Portfolios . . . . .	247
8.1.10	Finanzinnovationen . . . . .	248
8.2	Lebensversicherungsmathematik . . . . .	249
8.2.1	Versicherungsformen . . . . .	250
8.2.2	Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbetafeln . . . . .	250
8.2.3	Die Zahlungsströme eines Lebensversicherungsvertrages . . . . .	252
8.2.4	Die Bewertung von Zahlungsströmen und Lebensversicherungsverträgen . . . . .	254
8.2.5	Äquivalenzprinzip und Nettoprämie . . . . .	255
8.2.6	Prospektives Deckungskapital . . . . .	255
8.2.7	Prämienarten . . . . .	255
8.2.8	Der Satz von Hattendorf . . . . .	256
8.3	Schadenversicherungsmathematik . . . . .	257
8.3.1	Das kollektive Modell für eine Versicherungsperiode . . . . .	257
8.3.2	Berechnung der Gesamtschadenverteilung . . . . .	259
8.3.3	Ruintheorie, Cramér-Lundberg-Modell . . . . .	262
8.3.4	Rückversicherung und Risikoteilung . . . . .	266
8.3.5	Elemente der klassischen Extremwerttheorie . . . . .	266
8.4	Finanzmathematik in zeitlich diskreten Marktmodellen . . . . .	267
8.4.1	Wertanlagen, Handelsstrategien und Arbitrage . . . . .	267
8.4.2	Absicherung und arbitragefreie Bewertung von Optionen . . . . .	269
8.5	Finanzmathematik in zeitstetigen Marktmodellen . . . . .	273
8.5.1	Wertprozesse und Handelsstrategien . . . . .	273
8.5.2	Der Itô-Kalkül . . . . .	274
8.5.3	Das Black-Scholes-Modell . . . . .	277
8.6	Lineare Optimierung . . . . .	282
8.6.1	Primale und duale Aufgabe . . . . .	282
8.6.2	Primaler Simplexalgorithmus . . . . .	285
8.6.3	Innere-Punkte-Methode . . . . .	287
8.6.4	Parametrische lineare Optimierung . . . . .	289
8.6.5	Das klassische Transportproblem . . . . .	291
8.6.6	Das Engpasstransportproblem . . . . .	293
8.7	Nichtlineare Optimierung . . . . .	294
8.7.1	Optimalitätsbedingungen bei allgemeinen Nebenbedingungen . . . . .	296
8.7.2	Optimalitätsbedingungen bei expliziten Nebenbedingungen . . . . .	297
8.7.3	Lagrange-Dualität . . . . .	300
8.7.4	Sattelpunkte . . . . .	302
8.7.5	Lösung freier nichtlinearer Optimierungsaufgaben . . . . .	302
8.7.6	Lösung restriktiver Optimierungsaufgaben . . . . .	303

8.8	Diskrete Optimierung . . . . .	305
8.8.1	Exakte Lösung von diskreten Optimierungsaufgaben . . . . .	306
8.8.2	Dualität . . . . .	310
8.8.3	Näherungsalgorithmen . . . . .	312
8.8.4	Matroide und der Greedy-Algorithmus . . . . .	312
8.8.5	Spezielle Probleme . . . . .	313
8.9	Optimierungsprobleme über Graphen . . . . .	314
8.9.1	Kürzeste Wege in gerichteten Graphen . . . . .	315
8.9.2	Minimalgerüste . . . . .	316
8.9.3	Flussprobleme . . . . .	317
8.9.4	Kostenminimal Flüsse . . . . .	319
8.9.5	Matchings minimalen Gewichtes . . . . .	320
8.9.6	Eulersche Graphen und das Problem des chinesischen Postboten . . . . .	322
8.9.7	Hamiltonkreise und das Rundreiseproblem . . . . .	323
8.10	Mathematische Spieltheorie . . . . .	325
8.10.1	Problemstellung . . . . .	325
8.10.2	Nash-Gleichgewicht . . . . .	325
8.11	Vektoroptimierung . . . . .	327
8.11.1	Problemstellung und grundlegende Begriffe . . . . .	327
8.11.2	Lineare Skalarisierung und Optimalitätsbedingungen . . . . .	331
8.11.3	Weitere Skalarisierungstechniken . . . . .	333
8.11.4	Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingungen . . . . .	334
8.11.5	Dualität . . . . .	335
8.12	Portfoliooptimierung . . . . .	336
8.12.1	Das Markowitz-Portfoliooptimierungsproblem . . . . .	337
8.12.2	Lineare Skalarisierung und eigentlich effiziente Portfolios . . . . .	338
8.12.3	Dualität und Optimalitätsbedingungen . . . . .	341
8.12.4	Erweiterungen . . . . .	341
8.13	Anwendungen der Differentialrechnung in den Wirtschaftswissenschaften . . . . .	342
8.13.1	Funktionswertänderungen bei Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	342
8.13.2	Funktionswertänderungen bei Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher . . . . .	346
8.13.3	Extremwertprobleme in den Wirtschaftswissenschaften . . . . .	347
<b>Literatur zu Kapitel 8 . . . . .</b>		350
<b>9</b>	<b>Algorithmik und Informatik</b>	<b>353</b>
9.1	Geschichte der Informatik . . . . .	353
9.2	Alphabete, Wörter, Sprachen und Aufgaben . . . . .	359
9.2.1	Zielsetzung . . . . .	359
9.2.2	Alphabete, Wörter und Sprachen . . . . .	360
9.2.3	Algorithmische Probleme . . . . .	364
9.3	Endliche Automaten . . . . .	371
9.3.1	Zielsetzung . . . . .	371
9.3.2	Die Darstellungen der endlichen Automaten . . . . .	372
9.3.3	Simulationen . . . . .	382
9.3.4	Beweise der Nichtexistenz . . . . .	385
9.3.5	Nichtdeterminismus . . . . .	390
9.4	Turingmaschinen . . . . .	397
9.4.1	Zielsetzung . . . . .	397
9.4.2	Das Modell der Turingmaschine . . . . .	398
9.4.3	Mehrband-Turingmaschinen und Churchsche These . . . . .	405
9.4.4	Nichtdeterministische Turingmaschinen . . . . .	412

9.4.5	Kodierung von Turingmaschinen . . . . .	416
9.5	Berechenbarkeit . . . . .	417
9.5.1	Zielsetzung . . . . .	417
9.5.2	Die Methode der Diagonalisierung . . . . .	418
9.5.3	Die Methode der Reduktion . . . . .	424
9.5.4	Satz von Rice . . . . .	432
9.6	Komplexitätstheorie . . . . .	435
9.6.1	Zielsetzung . . . . .	435
9.6.2	Komplexitätsmaße . . . . .	436
9.6.3	Komplexitätsklassen und die Klasse P . . . . .	441
9.6.4	Nichtdeterministische Komplexitätsmaße . . . . .	444
9.6.5	Die Klasse NP und Beweisverifikation . . . . .	447
9.6.6	NP-Vollständigkeit . . . . .	450
9.7	Algorithmik für schwere Probleme . . . . .	465
9.7.1	Zielsetzung . . . . .	465
9.7.2	Approximationsalgorithmen . . . . .	466
9.7.3	Lokale Suche . . . . .	471
9.7.4	Simulated Annealing . . . . .	474
9.8	Randomisierung . . . . .	476
9.8.1	Zielsetzung . . . . .	476
9.8.2	Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	478
9.8.3	Ein randomisiertes Kommunikationsprotokoll . . . . .	480
9.8.4	Die Methode der Fingerabdrücke und die Äquivalenz von zwei Polynomen . . . . .	483
9.9	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	487
9.10	Unscharfe Mengen und Fuzzy-Methoden . . . . .	490
9.10.1	Unschärfe und mathematische Modellierung . . . . .	490
9.10.2	Mengenalgebra . . . . .	491
9.10.3	Unscharfe Zahlen und ihre Arithmetik . . . . .	502
9.10.4	Unscharfe Variable . . . . .	508
9.10.5	Unscharfe Relationen . . . . .	509
9.10.6	Unschärfemaße . . . . .	511
9.10.7	Wahrscheinlichkeiten unscharfer Ereignisse . . . . .	513
9.10.8	Unscharfe Maße . . . . .	514
	<b>Literatur zu Kapitel 9 . . . . .</b>	<b>515</b>
	<b>Index</b>	<b>519</b>