

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Primzerlegung in \mathbb{Z} und \mathbb{Q}

Einleitung

§ 0	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	13
	1. Der Ring \mathbb{Z} der ganzen und der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen –	
	2. Anordnung von \mathbb{Z} und \mathbb{Q} – 3. Prinzip vom kleinsten Element und	
	Induktionsprinzip – 4. Division mit Rest	
§ 1	Teilbarkeit, Primzahlen	22
	1. Teilbarkeitsbegriff – 2. Primzahlen – 3. Existenz unendlich vieler	
	Primzahlen – 4. Unzerlegbarkeit und Primeigenschaft	
§ 2	Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie	28
	1. Existenz einer Primzerlegung – 2. Eindeutigkeit der Primzerlegung –	
	3*. Der Eindeutigkeitsbeweis von ZERMELO – 4*. Kritische Bemerkungen	
§ 3	Anwendungen des Hauptsatzes	33
	1. Anzahl aller positiven Teiler – 2. Produkt aller positiven Teiler –	
	3. Summe aller positiven Teiler – 4. Vollkommene Zahlen –	
	5. Mersennesche Primzahlen – 6. Fermatsche Primzahlen	
§ 4	Zahlentheorie im Körper \mathbb{Q}	42
	1. Primzerlegung in \mathbb{Q} – 2. Irrationalitätsaussagen – 3*. Zur Irrationalität	
	und Transzendenz von e und π – 4. Die Vielfachheitsfunktion $w_p(a)$ –	
	5*. Ägyptische Bruchdarstellungen, Fibonaccimethode	

Kapitel 2

Theorie des größten gemeinsamen Teilers in \mathbb{Z}

Einleitung

§ 1	Größter gemeinsamer Teiler	55
	1. Größter gemeinsamer Teiler zweier ganzer Zahlen – 2. Euklidischer	
	Algorithmus – 3. Idealtheoretische Charakterisierung des größten	
	gemeinsamen Teilers – 4. Größter gemeinsamer Teiler endlich vieler	
	ganzer Zahlen – 5. Teilerfremdheit – 6. Reduzierte Bruchdarstellung –	
	7. Kleinstes gemeinsames Vielfaches	
§ 2	Über die Verteilung und Darstellung von Primzahlen	70
	1. Elementare Verteilungssätze – 2. Großer Primzahlsatz – 3*. Die	
	Chebyshevsche Abschätzung – 4. Große Primzahlen – 5. Primzahlen in	
	arithmetischen Progressionen – 6. Primzahlen als Werte von Polynomen	
§ 3	Zahlentheoretische Funktionen	81
	1. Multiplikative Funktionen – 2. Eulersche φ -Funktion –	
	3. DIRICHLET-Faltung – 4. Summatorfunktionen	

Kapitel 3

Zahlentheorie in allgemeinen Integritätsringen

Einleitung

§ 0	Integritätsringe	95
	1. Allgemeine Begriffe der Ringtheorie – 2. Polynomringe – 3. Quadratische Zahlbereiche	
§ 1	Teilbarkeitstheorie in Integritätsringen	101
	1. Grundbegriffe der Teilbarkeitstheorie – 2. Normfunktionen – 3. Zerlegungssatz für Integritätsringe mit monotoner Normfunktion	
§ 2	Faktorielle Ringe, Hauptidealringe und euklidische Ringe	111
	1. Faktorielle Ringe – 2. Hauptidealringe – 3. Euklidische Ringe – 4. Beispiele – 5*. Weiterführende Ergebnisse – 6. Zerlegung von Primzahlen in quadratischen Zahlbereichen – 7. Charakterisierung von Primzahlen in quadratischen Zahlbereichen	
§ 3	Zahlentheorie in faktoriellen Ringen und in Hauptidealringen	126
	1. Zahlentheorie in faktoriellen Ringen – 2. Theorie des größten gemeinsamen Teilers – 3. Integritätsringe mit ggT – 4. Charakterisierung faktorieller Ringe. Zerlegungssatz für noethersche Ringe	

Kapitel 4

Der g -adische Algorithmus

Einleitung

§ 1	g -adische und Cantorsche Darstellung natürlicher Zahlen	139
	0. Historisches Präludium – 1. Existenz und Eindeutigkeit der g -adischen Darstellung – 2. Rechnen im g -adischen System – 3*. Cantorsche Darstellung natürlicher Zahlen	
§ 2	g -adische Darstellung rationaler Zahlen	148
	1. g -adischer Algorithmus – 2. Endliche g -adische Darstellungen – 3. Periodische g -adische Darstellungen	
§ 3	Periodizitätssätze. Satz von FERMAT-EULER	158
	1. Kriterien für reine Periodizität – 2. Charakterisierung von Vorperioden und Perioden – 3. Zyklische Ziffernverschiebung – 4. Satz von FERMAT-EULER	
§ 4*	(Anhang) g -adische Entwicklung als Approximationsverfahren	168
	1*. Approximationskriterium – 2*. Konstruktion von Brüchen zu g -periodischen Folgen – 3*. g -adische Entwicklungen und unendliche Reihen	

Kapitel 5

Kongruenzen und Restklassenringe

Einleitung

§ 1	Kongruenzenrechnung	179
	1. Kongruenzrelation. Elementares Rechnen mit Kongruenzen 2. Kongruenzen zu verschiedenen Moduln – 3. Neuner- und Elferprobe –	

	4. Der Satz von FERMAT-EULER als Kongruenzsatz – 5. Anwendung des Satzes von FERMAT-EULER in der Kryptographie	
§ 2	Satz von WILSON. Chinesischer Restsatz	192
	1. Lineare Kongruenzen – 2. Der Satz von WILSON – 3. Ein Satz von EULER – 4. Chinesischer Restsatz	
§ 3	Restklassenringe und Polynomkongruenzen	201
	1. Restklassenringe – 2. Primideale und maximale Ideale – 3. Polynomkongruenzen und Polynomgleichungen – 4. Satz von LAGRANGE	

Kapitel 6

Prime Restklassengruppen

	Einleitung	
§ 1	Elementare Gruppentheorie	213
	1. Gruppenbegriff. Beispiele aus der Zahlentheorie – 2. Untergruppen, Kongruenz, Ordnung einer Gruppe – 3. Ordnung eines Gruppenelementes – 4. Verallgemeinerungen der Sätze von FERMAT-EULER und WILSON	
§ 2	Zyklische prime Restklassengruppen	223
	1. Allgemeines Zyklizitätskriterium – 2. Existenz von Primitivwurzeln zu Primzahlen – 3. Zyklizität der Gruppen $\mathbb{Z}_{p^n}^*$ – 4. Kleine Primitivwurzeln zu p^n – 5. Zyklizität der Gruppen $\mathbb{Z}_{2p^n}^*$ – 6. Bestimmung aller zyklischen Gruppen \mathbb{Z}_m^*	

Kapitel 7

Theorie der quadratischen Reste

	Einleitung	
§ 1	Quadratische Reste	237
	1. Quadratische Reste modulo einer beliebigen Zahl $m > 1$ – 2. Quadratische Reste modulo Primzahlpotenzen – 3. Quadratische Reste modulo einer ungeraden Primzahl – 4. Legendresches Restsymbol – 5. Gaußsches Lemma	
§ 2	Quadratisches Reziprozitätsgesetz	248
	1. Formulierung des Reziprozitätsgesetzes. Beispiele – 2. Beweis des Reziprozitätsgesetzes – 3*. Analytischer Beweis des Reziprozitätsgesetzes nach EISENSTEIN – 4. Das Reziprozitätsgesetz für das Jacobische Restsymbol – 5. Anwendungen des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes	
	Literatur	266
	Namenverzeichnis	267
	Sachverzeichnis	269
	Symbolverzeichnis	274