

Inhaltsverzeichnis

1	Der Zahlenraum \mathbb{R}^n und der Begriff des reellen Vektorraums	1
1.1	Lineare Gleichungssysteme	1
1.1.1	Beispiele und Spezialfälle	1
1.1.2	Die Eliminationsverfahren von GAUSS und GAUSS-JORDAN	15
	Aufgaben	28
1.2	Vektorrechnung im \mathbb{R}^n und der Begriff des \mathbb{R} -Vektorraums	30
1.2.1	Vektoren im \mathbb{R}^n , Hyperebenen und Gleichungen	30
1.2.2	Tupel-Vektorräume und der allgemeine \mathbb{R} -Vektorraum	44
	Aufgaben	52
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt	53
1.3.1	Erzeugendensystem und lineare Hülle	53
1.3.2	Das Matrix-Vektor-Produkt	60
	Aufgaben	72
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	73
1.4.1	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	73
1.4.2	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume I: Dimensionsformeln	86
	Aufgaben	95
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n und Vektorräume mit Skalarprodukt	97
1.5.1	Skalarprodukt, Norm und Winkel	97
1.5.2	Orthogonalität und orthogonale Projektion	104
	Aufgaben	123
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	125
	Aufgaben	131
1.7	Affine Räume I	133
	Aufgaben	143
2	Matrizen und lineare Abbildungen	145
2.1	Lineare Abbildungen	145
2.1.1	Allgemeine lineare Abbildungen	145
2.1.2	Bewegungen und orthogonale Transformationen	154

	Aufgaben	163
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrizendarstellung	164
2.2.1	Darstellungsmatrizen	164
2.2.2	Dimension und Isomorphie	172
	Aufgaben	179
2.3	Matrizenrechnung	181
2.3.1	Matrizenmultiplikation	181
2.3.2	Tensorprodukt von Vektoren und Projektionen	188
2.3.3	Invertierbare Matrizen	198
2.3.4	Das GAUSS-Verfahren vom Matrizenstandpunkt	205
2.3.5	Transponierte, orthogonale und symmetrische Matrix	210
	Aufgaben	229
2.4	Lösbare und nichtlösbare lineare Gleichungssysteme	230
2.4.1	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume II	230
2.4.2	Ausgleichsrechnung und Pseudoinverse	233
2.4.3	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung I	246
	Aufgaben	255
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix	257
2.5.1	Permutationen und Permutationsmatrizen	257
2.5.2	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung II	264
	Aufgaben	273
2.6	Die Determinante	274
2.6.1	Motivation und Existenz	274
2.6.2	Eigenschaften	280
2.6.3	Orientierung und Determinante	294
	Aufgaben	299
2.7	Das Vektorprodukt	300
	Aufgaben	308
2.8	Affine Räume II	309
	Aufgaben	317
3	Vom \mathbb{R}-Vektorraum zum K-Vektorraum: Algebraische Strukturen	319
3.1	Gruppen und Körper	319
	Aufgaben	332
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern	334
	Aufgaben	342
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	344
	Aufgaben	356
3.4	Der Quotientenvektorraum	357
	Aufgaben	368
3.5	Der Dualraum	370
	Aufgaben	381

4	Eigenwerte und Normalformen von Matrizen	383
4.1	Basiswechsel und Koordinatentransformationen	383
	Aufgaben	394
4.2	Eigenwerttheorie	396
4.2.1	Definitionen und Anwendungen	396
4.2.2	Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit	417
	Aufgaben	435
4.3	Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation	437
	Aufgaben	450
4.4	Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform	452
4.4.1	Der Satz von CAYLEY-HAMILTON	452
4.4.2	Blockdiagonalisierung mit dem Satz von CAYLEY-HAMILTON	461
4.4.3	Algorithmische Blockdiagonalisierung – Die SYLVESTER-Gleichung	469
	Aufgaben	476
4.5	Die JORDANSche Normalform	477
4.5.1	Kettenbasen und die JORDANSche Normalform im Komplexen	477
4.5.2	Die reelle JORDANSche Normalform	493
4.5.3	Beispiele und Berechnung	501
	Aufgaben	511
4.6	Die Singulärwertzerlegung	513
4.6.1	Herleitung	513
4.6.2	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	523
	Aufgaben	528
4.7	Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung	530
4.7.1	Positiv definite Matrizen	530
4.7.2	Quadratische Optimierung	540
4.7.3	Extremalcharakterisierung von Eigenwerten	550
	Aufgaben	554
4.8	Ausblick: Das Ausgleichsproblem und die QR-Zerlegung	556
5	Bilinearformen und Quadriken	561
5.1	α -Bilinearformen	561
5.1.1	Der Vektorraum der α -Bilinearformen	561
5.1.2	Orthogonales Komplement	570
	Aufgaben	580
5.2	Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen	582
	Aufgaben	590
5.3	Quadriken	591
5.3.1	Die affine Normalform	594
5.3.2	Die euklidische Normalform	603
	Aufgaben	606
5.4	Alternierende Bilinearformen	608
	Aufgaben	614

6	Polyeder und lineare Optimierung	617
6.1	Elementare konvexe Geometrie	623
	Aufgaben	627
6.2	Polyeder	628
	Aufgaben	645
6.3	Beschränkte Polyeder	646
	Aufgaben	653
6.4	Das Optimierungsproblem	655
	Aufgaben	661
6.5	Ecken und Basislösungen	663
	Aufgaben	670
6.6	Das Simplex-Verfahren	671
	Aufgaben	678
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	680
	Aufgaben	691
7	Lineare Algebra und Analysis	693
7.1	Normierte Vektorräume	693
7.1.1	Analysis auf normierten Vektorräumen	693
7.1.2	Normen und Dimension	700
	Aufgaben	712
7.2	Normierte Algebren	713
7.2.1	Erzeugte und verträgliche Normen	713
7.2.2	Matrixpotenzen	723
	Aufgaben	744
7.3	HILBERT-Räume	746
7.3.1	Der RIESZsche Darstellungssatz und der adjungierte Operator	746
7.3.2	SCHAUDER-Basen	762
	Aufgaben	769
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung	770
	Aufgaben	773
8	Einige Anwendungen der Linearen Algebra	775
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	775
8.1.1	Lineare Gleichungssysteme	775
8.1.2	Ausgleichsprobleme	784
8.1.3	Eigenwerte	788
	Aufgaben	792
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	794
8.2.1	Das Page-Rank-Verfahren von Google	794
8.2.2	Linear-stationäre Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	799
8.2.3	Gradientenverfahren	808
8.2.4	Die Potenzmethode zur Eigenwertberechnung	813
	Aufgaben	816

8.3	Datenanalyse, -synthese und -kompression	819
8.3.1	Wavelets	821
8.3.2	Diskrete FOURIER-Transformation	828
	Aufgaben	835
8.4	Lineare Algebra und Graphentheorie	837
	Aufgaben	843
8.5	(Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse	844
	Aufgaben	858
8.6	Kontinuierliche und dynamische Systeme	859
8.6.1	Die Lösungsraumstruktur bei linearen Problemen	859
8.6.2	Stabilität: Asymptotisches Verhalten für große Zeiten	875
8.6.3	Approximation kontinuierlicher durch diskrete dynamische Systeme	891
8.6.4	Ausblick: Vom räumlich diskreten zum räumlich verteilten kontinuierlichen Modell	901
8.6.5	Stochastische Matrizen	906
	Aufgaben	913
A	Logisches Schließen und Mengenlehre	915
A.1	Aussagenlogik	915
A.2	Mengenlehre	920
A.3	Prädikatenlogik	924
A.4	Produkte von Mengen, Relationen und Abbildungen	926
A.5	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	933
B	Zahlenmengen und algebraische Strukturen	939
B.1	Von den PEANO-Axiomen zu den reellen Zahlen	939
B.2	Schreibweisen und Rechenregeln	946
B.3	(Formale) Polynome	949
C	Analysis in normierten Räumen	961
	Literaturverzeichnis	967
	Sachverzeichnis	969