

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Zahlenraum <math>\mathbb{R}^n</math> und der Begriff des reellen Vektorraums</b>	1
1.1	Lineare Gleichungssysteme .....	1
1.1.1	Beispiele und Spezialfälle .....	1
1.1.2	Die Eliminationsverfahren von GAUSS und GAUSS-JORDAN .....	15
	Aufgaben .....	28
1.2	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des $\mathbb{R}$ -Vektorraums .....	30
1.2.1	Vektoren im $\mathbb{R}^n$ , Hyperebenen und Gleichungen .....	30
1.2.2	Tupel-Vektorräume und der allgemeine $\mathbb{R}$ -Vektorraum .....	44
	Aufgaben .....	52
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt .....	53
1.3.1	Erzeugendensystem und lineare Hülle .....	53
1.3.2	Das Matrix-Vektor-Produkt .....	60
	Aufgaben .....	72
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension .....	73
1.4.1	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension .....	73
1.4.2	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume I: Dimensionsformeln .....	86
	Aufgaben .....	95
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und Vektorräume mit Skalarprodukt	97
1.5.1	Skalarprodukt, Norm und Winkel .....	97
1.5.2	Orthogonalität und orthogonale Projektion .....	104
	Aufgaben .....	123
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	125
	Aufgaben .....	131
1.7	Affine Räume I .....	133
	Aufgaben .....	143
<b>2</b>	<b>Matrizen und lineare Abbildungen</b>	145
2.1	Lineare Abbildungen .....	145
2.1.1	Allgemeine lineare Abbildungen .....	145
2.1.2	Bewegungen und orthogonale Transformationen .....	154

	Aufgaben .....	163
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrendarstellung .....	164
2.2.1	Darstellungsmatrizen .....	164
2.2.2	Dimension und Isomorphie .....	172
	Aufgaben .....	179
2.3	Matrizenrechnung .....	181
2.3.1	Matrizenmultiplikation .....	181
2.3.2	Tensorprodukt von Vektoren und Projektionen .....	188
2.3.3	Invertierbare Matrizen .....	198
2.3.4	Das GAUSS-Verfahren vom Matrizenstandpunkt .....	205
2.3.5	Transponierte, orthogonale und symmetrische Matrix .....	210
	Aufgaben .....	229
2.4	Lösbare und nichtlösbar lineare Gleichungssysteme .....	230
2.4.1	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume II .....	230
2.4.2	Ausgleichsrechnung und Pseudoinverse .....	233
2.4.3	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung I .....	246
	Aufgaben .....	255
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix .....	257
2.5.1	Permutationen und Permutationsmatrizen .....	257
2.5.2	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung II .....	264
	Aufgaben .....	273
2.6	Die Determinante .....	274
2.6.1	Motivation und Existenz .....	274
2.6.2	Eigenschaften .....	280
2.6.3	Orientierung und Determinante .....	294
	Aufgaben .....	299
2.7	Das Vektorprodukt .....	300
	Aufgaben .....	308
2.8	Affine Räume II .....	309
	Aufgaben .....	317
3	Vom $\mathbb{R}$ -Vektorraum zum $K$ -Vektorraum: Algebraische Strukturen .....	319
3.1	Gruppen und Körper .....	319
	Aufgaben .....	332
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern .....	334
	Aufgaben .....	342
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume .....	344
	Aufgaben .....	356
3.4	Der Quotientenvektorraum .....	357
	Aufgaben .....	368
3.5	Der Dualraum .....	370
	Aufgaben .....	381

<b>4 Eigenwerte und Normalformen von Matrizen</b> .....	383
4.1 Basiswechsel und Koordinatentransformationen .....	383
Aufgaben .....	394
4.2 Eigenwerttheorie .....	396
4.2.1 Definitionen und Anwendungen .....	396
4.2.2 Diagonalisierbarkeit und Trigonaisierbarkeit .....	417
Aufgaben .....	435
4.3 Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation .....	437
Aufgaben .....	450
4.4 Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform .....	452
4.4.1 Der Satz von CAYLEY-HAMILTON .....	452
4.4.2 Blockdiagonalisierung mit dem Satz von CAYLEY-HAMILTON ..	461
4.4.3 Algorithmische Blockdiagonalisierung – Die SYLVESTER-Gleichung .....	469
Aufgaben .....	476
4.5 Die JORDANSche Normalform .....	477
4.5.1 Kettenbasen und die JORDANSche Normalform im Komplexen ..	477
4.5.2 Die reelle JORDANSche Normalform .....	493
4.5.3 Beispiele und Berechnung .....	501
Aufgaben .....	511
4.6 Die Singulärwertzerlegung .....	513
4.6.1 Herleitung .....	513
4.6.2 Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse .....	523
Aufgaben .....	528
4.7 Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung .....	530
4.7.1 Positiv definite Matrizen .....	530
4.7.2 Quadratische Optimierung .....	540
4.7.3 Extremalcharakterisierung von Eigenwerten .....	550
Aufgaben .....	554
4.8 Ausblick: Das Ausgleichsproblem und die QR-Zerlegung .....	556
<b>5 Bilinearformen und Quadriken</b> .....	561
5.1 $\alpha$ -Bilinearformen .....	561
5.1.1 Der Vektorraum der $\alpha$ -Bilinearformen .....	561
5.1.2 Orthogonales Komplement .....	570
Aufgaben .....	580
5.2 Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen .....	582
Aufgaben .....	590
5.3 Quadriken .....	591
5.3.1 Die affine Normalform .....	594
5.3.2 Die euklidische Normalform .....	603
Aufgaben .....	606
5.4 Alternierende Bilinearformen .....	608
Aufgaben .....	614

<b>6</b>	<b>Polyeder und lineare Optimierung</b>	617
6.1	Elementare konvexe Geometrie	623
Aufgaben		627
6.2	Polyeder	628
Aufgaben		645
6.3	Beschränkte Polyeder	646
Aufgaben		653
6.4	Das Optimierungsproblem	655
Aufgaben		661
6.5	Ecken und Basislösungen	663
Aufgaben		670
6.6	Das Simplex-Verfahren	671
Aufgaben		678
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	680
Aufgaben		691
<b>7</b>	<b>Lineare Algebra und Analysis</b>	693
7.1	Normierte Vektorräume	693
7.1.1	Analysis auf normierten Vektorräumen	693
7.1.2	Normen und Dimension	700
Aufgaben		712
7.2	Normierte Algebren	713
7.2.1	Erzeugte und verträgliche Normen	713
7.2.2	Matrixpotenzen	723
Aufgaben		744
7.3	HILBERT-Räume	746
7.3.1	Der RIESzsche Darstellungssatz und der adjungierte Operator	746
7.3.2	SCHAUDER-Basen	762
Aufgaben		769
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung	770
Aufgaben		773
<b>8</b>	<b>Einige Anwendungen der Linearen Algebra</b>	775
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	775
8.1.1	Lineare Gleichungssysteme	775
8.1.2	Ausgleichsprobleme	784
8.1.3	Eigenwerte	788
Aufgaben		792
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	794
8.2.1	Das Page-Rank-Verfahren von Google	794
8.2.2	Linear-stationäre Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	799
8.2.3	Gradientenverfahren	808
8.2.4	Die Potenzmethode zur Eigenwertberechnung	813
Aufgaben		816

8.3	Datenanalyse, -synthese und -kompression .....	819
8.3.1	Wavelets .....	821
8.3.2	Diskrete FOURIER-Transformation .....	828
Aufgaben .....	835	
8.4	Lineare Algebra und Graphentheorie .....	837
Aufgaben .....	843	
8.5	(Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse .....	844
Aufgaben .....	858	
8.6	Kontinuierliche und dynamische Systeme .....	859
8.6.1	Die Lösungsraumstruktur bei linearen Problemen .....	859
8.6.2	Stabilität: Asymptotisches Verhalten für große Zeiten .....	875
8.6.3	Approximation kontinuierlicher durch diskrete dynamische Systeme .....	891
8.6.4	Ausblick: Vom räumlich diskreten zum räumlich verteilten kontinuierlichen Modell .....	901
8.6.5	Stochastische Matrizen .....	906
Aufgaben .....	913	
<b>A</b>	<b>Logisches Schließen und Mengenlehre .....</b>	<b>915</b>
A.1	Aussagenlogik .....	915
A.2	Mengenlehre .....	920
A.3	Prädikatenlogik .....	924
A.4	Produkte von Mengen, Relationen und Abbildungen .....	926
A.5	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen .....	933
<b>B</b>	<b>Zahlenmengen und algebraische Strukturen .....</b>	<b>939</b>
B.1	Von den PEANO-Axiomen zu den reellen Zahlen .....	939
B.2	Schreibweisen und Rechenregeln .....	946
B.3	(Formale) Polynome .....	949
<b>C</b>	<b>Analysis in normierten Räumen .....</b>	<b>961</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>967</b>	
<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>969</b>	