

Inhalt Band 3

Mehr-dimensionale Infinitesimalrechnung	815
54 Vektorwertige Funktionen mehrerer reeller Variablen	817
54.1 Einleitung	817
54.2 Kurven in \mathbb{R}^n	818
54.3 Verschiedene Parametrisierungen einer Kurve	819
54.4 Oberflächen in \mathbb{R}^n für $n \geq 3$	820
54.5 Lipschitz-Stetigkeit	821
54.6 Jacobi-Matrix, Gradient und Tangente	822
54.7 Die Kettenregel	827
54.8 Der Mittelwertsatz	827
54.9 Die Richtung des steilsten Abstiegs und der Gradient	829
54.10 Ein Minimumspunkt ist ein stationärer Punkt	831
54.11 Die Methode des steilsten Abstiegs	831
54.12 Richtungsableitungen	832
54.13 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	832
54.14 Der Satz von Taylor	834
54.15 Der Kontraktionssatz	835
54.16 Nullstellen von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	837
54.17 Der Satz zur inversen Funktion	838
54.18 Der Satz über implizite Funktionen	839
54.19 Die Newton-Methode	840
54.20 Ableitung unter dem Integral	841

55 Höhenlinien/Niveauflächen und der Gradient	845
55.1 Höhenlinien	845
55.2 Lokale Existenz von Höhenlinien	847
55.3 Höhenlinien und der Gradient	847
55.4 Niveauflächen	849
55.5 Lokale Existenz von Niveauflächen	849
55.6 Niveauflächen und der Gradient	849
56 Linearisierung und Stabilität von Anfangswert- problemen	853
56.1 Einleitung	853
56.2 Stationäre Lösungen	854
56.3 Linearisierung bei einer stationären Lösung	854
56.4 Stabilitätsanalyse für symmetrisches $f'(\bar{u})$	856
56.5 Stabilitätsfaktoren	856
56.6 Stabilität zeitabhängiger Lösungen	859
56.7 Zusammenfassung	860
57 Adaptive Löser für AWP	863
57.1 Einleitung	863
57.2 Die cG(1)-Methode	864
57.3 Adaptive Zeitschrittkontrolle für cG(1)	866
57.4 Analyse von cG(1) für ein lineares skalares AWP	867
57.5 Analyse von cG(1) für ein allgemeines AWP	869
57.6 Analyse des rückwärtigen Euler Verfahrens	871
57.7 Steife Anfangswertprobleme	873
57.8 Explizite Zeitschrittwahl für steife Probleme	876
58 Lorenz und das Wesentliche am Chaos*	883
58.1 Einleitung	883
58.2 Das Lorenz-System	884
58.3 Die Genauigkeit der Berechnungen	887
58.4 Berechenbarkeit des Lorenz-Systems	888
58.5 Die Herausforderung	891
59 Das Sonnensystem*	895
59.1 Einleitung	895
59.2 Die Newtonsche Gleichung	898
59.3 Die Einsteinsche Gleichung	899
59.4 Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen	901
59.5 Vorhersagbarkeit und Berechenbarkeit	904
59.6 Adaptive Zeitschrittwahl	905
59.7 Grenzen der Berechenbarkeit und Vorhersagbarkeit	906

60 Optimierung	909
60.1 Einleitung	909
60.2 Sortieren für endliches Ω	911
60.3 Was tun, wenn Ω nicht endlich ist?	911
60.4 Die Existenz eines Minimums	912
60.5 In einem inneren Minimum ist die Ableitung gleich Null	913
60.6 Die Rolle der Hesseschen Matrix	916
60.7 Minimierungsalgorithmen: Der steilste Abstieg	917
60.8 Existenz eines Minimalwerts und eines Minimums . . .	918
60.9 Existenz einer größten unteren Schranke	920
60.10 Konstruierbarkeit eines Minimums und eines Minimalwerts	921
60.11 Eine beschränkte abnehmende Folge konvergiert! . . .	922
61 Divergenz, Rotation und Laplace-Operator	925
61.1 Einleitung	925
61.2 Betrachtung für \mathbb{R}^2	926
61.3 Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten	927
61.4 Einige wichtige Beispiele	928
61.5 Der Laplace-Operator bei starren Koordinatentrans- formationen	928
61.6 Betrachtung für \mathbb{R}^3	929
61.7 Weitere wichtige Beispiele	930
61.8 Der Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten . . .	931
62 Meteorologie und Corioliskraft*	935
62.1 Einleitung	935
62.2 Ein grundlegendes meteorologisches Modell	936
62.3 Rotierende Koordinatensysteme und die Coriolisbeschleunigung	937
63 Kurvenintegrale	941
63.1 Einleitung	941
63.2 Die Länge einer Kurve in \mathbb{R}^2	941
63.3 Kurvenintegrale	943
63.4 Reparametrisierung	944
63.5 Arbeit und Linienintegrale	945
63.6 Arbeit und Gradientenfelder	947
63.7 Die Bogenlänge als Parameter	948
63.8 Die Krümmung einer ebenen Kurve	949
63.9 Erweiterung auf Kurven in \mathbb{R}^n	950
64 Doppelintegrale	953
64.1 Einleitung	953
64.2 Doppelintegrale über dem Einheitsquadrat	954

64.3	Doppelintegrale mit Hilfe ein-dimensionalen Integration	957
64.4	Verallgemeinerung auf ein beliebiges Rechteck	960
64.5	Interpretation des Doppelintegrals als Volumen	960
64.6	Erweiterung auf beliebige Gebiete	961
64.7	Iterierte Integrale über allgemeine Gebiete	963
64.8	Die Fläche eines zwei-dimensionalen Gebiets	964
64.9	Das Integral als Grenzwert einer allgemeinen Riemannschen Summe	964
64.10	Substitution bei Doppelintegralen	965
65	Oberflächenintegrale	971
65.1	Einleitung	971
65.2	Die Fläche einer Oberfläche	971
65.3	Die Fläche der Oberfläche des Graphen einer Funktion zweier Variabler	974
65.4	Oberflächen von Drehkörpern	974
65.5	Unabhängigkeit von der Parametrisierung	975
65.6	Oberflächenintegrale	976
65.7	Das Trägheitsmoment einer dünnen kugelförmigen Schale	977
66	Mehrfachintegrale	981
66.1	Einleitung	981
66.2	Dreifachintegrale über dem Einheitswürfel	981
66.3	Dreifachintegrale über allgemeine Gebiete in \mathbb{R}^3	982
66.4	Das Volumen eines drei-dimensionalen Gebiets	983
66.5	Dreifachintegrale als Grenzwerte Riemannscher Summen	984
66.6	Substitution bei Dreifachintegralen	985
66.7	Drehkörper	987
66.8	Das Trägheitsmoment einer Kugel	988
67	Der Satz von Gauss und die Greensche Formel in \mathbb{R}^2	991
67.1	Einleitung	991
67.2	Der Spezialfall eines Quadrats	992
67.3	Der Allgemeinfall	992
68	Der Satz von Gauss und die Greensche Formel in \mathbb{R}^3	1001
68.1	Einleitung	1001
68.2	George Green	1004
69	Der Satz von Stokes	1007
69.1	Einleitung	1007
69.2	Der Spezialfall einer Fläche in einer Ebene	1009
69.3	Verallgemeinerung auf eine beliebige ebene Fläche	1010

69.4	Eine durch eine ebene Kurve beschränkte Fläche . . .	1011
70	Potentialfelder	1015
70.1	Einleitung	1015
70.2	Ein rotationsfreies Feld ist ein Potentialfeld	1016
70.3	Ein Gegenbeispiel für ein nicht konvexes Ω	1018
71	Massenschwerpunkt und archimedisches Prinzip*	1021
71.1	Einleitung	1021
71.2	Massenschwerpunkt	1022
71.3	Das archimedisches Prinzip	1025
71.4	Die Stabilität schwimmender Körper	1027
72	Der Albtraum von Newton*	1031
73	Laplacesche Modelle	1037
73.1	Einleitung	1037
73.2	Wärmeleitung	1037
73.3	Die Wärmeleitungsgleichung	1040
73.4	Die stationäre Wärmeleitung: Die Poisson-Gleichung	1041
73.5	Ein Modell für Konvektion, Diffusion und Reaktion	1043
73.6	Eine elastische Membran	1044
73.7	Lösung der Poisson-Gleichung	1046
73.8	Die Wellengleichung: Eine schwingende elastische Membran	1047
73.9	Strömungsmechanik	1048
73.10	Die Maxwell'schen Gleichungen	1054
73.11	Die Gravitation	1059
73.12	Das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator	1063
73.13	Quantenmechanik	1065
74	Chemische Reaktionen*	1071
74.1	Konstante Temperatur	1071
74.2	Veränderliche Temperatur	1074
74.3	Räumliche Abhängigkeit	1075
75	Werkzeugkoffer: Infinitesimalrechnung II	1077
75.1	Einleitung	1077
75.2	Lipschitz-Stetigkeit	1077
75.3	Differenzierbarkeit	1077
75.4	Die Kettenregel	1078
75.5	Der Mittelwertsatz für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	1078
75.6	Ein Minimum ist ein stationärer Punkt	1078
75.7	Der Satz von Taylor	1078
75.8	Der Kontraktionssatz	1079

75.9	Der Satz zur inversen Funktion	1079
75.10	Die Newtonsche Methode	1079
75.11	Differential-Operatoren	1079
75.12	Kurvenintegrale	1080
75.13	Mehrfachintegrale	1080
75.14	Oberflächenintegrale	1081
75.15	Die Greensche Formel und der Satz von Gauss	1081
75.16	Der Satz von Stokes	1082
76	Stückweise lineare Polynome in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	1083
76.1	Einleitung	1083
76.2	Die Triangulierung eines Gebiets in \mathbb{R}^2	1084
76.3	Die Erzeugung von Gittern in \mathbb{R}^3	1087
76.4	Stückweise lineare Funktionen	1087
76.5	Fehlerabschätzungen mit der Maximum-Norm	1091
76.6	Sobolev und seine Räume	1094
76.7	Quadratur in \mathbb{R}^2	1095
77	FEM für Randwertprobleme in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	1099
77.1	Einleitung	1099
77.2	Richard Courant: Erfinder der FEM	1100
77.3	Variationsformulierung	1101
77.4	Die cG(1)-FEM	1101
77.5	Wichtige Datenstrukturen	1108
77.6	Die Lösung des diskreten Systems	1109
77.7	Ein äquivalentes Minimierungsproblem	1110
77.8	Eine a priori Fehlerabschätzung in der Energienorm .	1111
77.9	Eine a posteriori Fehlerabschätzung in der Energienorm	1112
77.10	Adaptive Fehlerkontrolle	1114
77.11	Ein Beispiel	1116
77.12	Nicht homogene Dirichlet-Randbedingungen	1117
77.13	Eine L-förmige Membran	1118
77.14	Robin- und Neumann-Randbedingungen	1119
77.15	Das stationäre Problem für Konvektion, Diffusion und Reaktion	1121
77.16	Das zeitabhängige Problem für Konvektion, Diffusion und Reaktion	1122
77.17	Die Wellengleichung	1123
77.18	Beispiele	1124
78	Inverse Probleme	1129
78.1	Einleitung	1129
78.2	Ein inverses Problem für die ein-dimensionale Konvektion	1131
78.3	Ein inverses Problem für die ein-dimensionale Diffusion	1134

78.4	Ein inverses Problem für die Poisson-Gleichung	1136
78.5	Ein inverses Problem für die Laplace-Gleichung	1138
78.6	Die rückwärtige Wärme Gleichung	1140
79	Optimale Kontrolle	1145
79.1	Einleitung	1145
79.2	Die Verbindung zwischen $\frac{dJ}{dp}$ und $\frac{\partial L}{\partial p}$	1147
80	Werkzeugkoffer: Differentialgleichungen	1151
80.1	Einleitung	1152
80.2	Die Gleichung $u'(x) = \lambda(x)u(x)$	1152
80.3	Die Gleichung $u'(x) = \lambda(x)u(x) + f(x)$	1152
80.4	Die Differentialgleichung $\sum_{k=0}^n a_k D^k u(x) = 0$	1152
80.5	Der gedämpfte lineare Oszillator	1153
80.6	Die Exponentialfunktion einer Matrix	1153
80.7	Fundamentallösungen des Laplace-Operators	1154
80.8	Die ein-dimensionale Wellengleichung	1154
80.9	Numerische Methoden für AWPe	1154
80.10	cG(1) für Konvektion, Diffusion und Reaktion	1155
80.11	Die Formel von Svensson für die Laplace-Gleichung . .	1155
80.12	Optimale Kontrolle	1156
81	Werkzeugkoffer: Anwendungen	1157
81.1	Einleitung	1157
81.2	Malthus und Populationswachstum	1157
81.3	Die logistische Gleichung	1157
81.4	Das Masse-Feder-Pralltopf System	1158
81.5	Der <i>LCR</i> -Stromkreis	1158
81.6	Die Laplace-Gleichung für die Gravitation	1158
81.7	Die Wärme Gleichung	1158
81.8	Die Wellengleichung	1158
81.9	Konvektion, Diffusion und Reaktion	1158
81.10	Die Maxwellschen Gleichungen	1159
81.11	Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	1159
81.12	Die Schrödingergleichung	1159
82	Analytische Funktionen	1161
82.1	Einleitung	1161
82.2	Die Definition einer analytischen Funktion	1161
82.3	Die Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten	1163
82.4	Lineare Funktionen sind analytisch	1164
82.5	Die Funktion $f(z) = z^2$ ist analytisch	1164
82.6	Die Funktion $f(z) = z^n$ ist analytisch für $n = 1, 2, \dots$	1164
82.7	Ableitungsregeln	1164
82.8	Die Funktion $f(z) = z^{-n}$	1165

82.9	Die Cauchy-Riemann Gleichungen	1165
82.10	Die Cauchy-Riemann Gleichungen und die Ableitung .	1166
82.11	Die Cauchy-Riemann Gleichungen in Polarkoordinaten	1167
82.12	Der Real- und der Imaginärteil einer analytischen Funktion	1167
82.13	Konjugiert harmonische Funktionen	1168
82.14	Die Ableitung einer analytischen Funktion ist analytisch	1168
82.15	Kurven in der komplexen Ebene	1169
82.16	Konforme Abbildungen	1170
82.17	Verschiebung, Rotation, Ausdehnung bzw. Kontraktion	1172
82.18	Inversion	1172
82.19	Möbius-Abbildungen	1173
82.20	$w = z^{1/2}$, $w = e^z$, $w = \log(z)$ und $w = \sin(z)$	1174
82.21	Komplexe Integrale: Ein erster Versuch	1175
82.22	Komplexe Integrale: Der Allgemeinfall	1176
82.23	Wichtige Eigenschaften des komplexen Integrals	1178
82.24	Die Taylor-Formel: Ein erster Versuch	1178
82.25	Der Satz von Cauchy	1179
82.26	Die Cauchysche Integralformel	1180
82.27	Die Taylor-Formel: Ein zweiter Versuch	1182
82.28	Potenzreihenentwicklungen von analytischen Funktionen	1183
82.29	Laurentreihen	1185
82.30	Das Residuum: Einfache Pole	1186
82.31	Das Residuum: Pole beliebiger Ordnung	1188
82.32	Der Residuensatz	1189
82.33	Berechnung von $\int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t)) dt$	1190
82.34	Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$	1190
82.35	Anwendungen für die Potentialtheorie in \mathbb{R}^2	1191

83 Fourier-Reihen 1199

83.1	Einleitung	1199
83.2	Anlauf I: Orthonormale Basis in \mathbb{C}	1202
83.3	Anlauf II: Reihen	1202
83.4	Komplexe Fourier-Reihen	1203
83.5	Fourier-Reihen als Entwicklung in einer orthonormalen Basis	1205
83.6	Abgeschnittene Fourier-Reihen und beste L_2 -Näherung	1205
83.7	Reelle Fourier-Reihen	1206
83.8	Grundlegende Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten	1209
83.9	Die Fourier-Inversion	1214
83.10	Parseval- und Plancheral-Formeln	1216
83.11	Orts- versus Frequenzanalyse	1217
83.12	Verschiedene Perioden	1218

83.13	Weierstrasssche Funktionen	1218
83.14	Lösung der Wärme Gleichung mit Fourier-Reihen	1219
83.15	Berechnung von Fourier-Koeffizienten durch Quadratur	1220
83.16	Die diskrete Fourier-Transformation	1221
84	Fourier-Transformation	1225
84.1	Einleitung	1225
84.2	Wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformierten .	1227
84.3	Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\xi)$ strebt für $ \xi \rightarrow \infty$ gegen 0	1229
84.4	Faltung	1229
84.5	Die Formel für die Inversion	1230
84.6	Die Parseval-Formel	1232
84.7	Die Lösung der Wärme Gleichung mit Hilfe der Fourier-Transformation	1232
84.8	Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	1233
84.9	Der Abtastsatz	1233
84.10	Die Laplace-Transformation	1234
84.11	Wavelets und die Haar Basis	1235
85	Werkzeugkoffer: Analytische Funktionen	1239
85.1	Differenzierbarkeit und analytische Eigenschaft	1239
85.2	Die Cauchy-Riemann Gleichungen	1239
85.3	Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion . .	1240
85.4	Konjugiert harmonische Funktionen	1240
85.5	Kurven in der komplexen Ebene	1240
85.6	Eine analytische Funktion definiert eine konforme Abbildung	1241
85.7	Komplexe Integrale	1241
85.8	Der Satz von Cauchy	1241
85.9	Die Cauchysche Integralformel	1241
85.10	Die Taylor-Formel	1242
85.11	Der Residuensatz	1242
86	Werkzeugkoffer: Fourier-Analyse	1243
86.1	Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten	1243
86.2	Faltung	1243
86.3	Fourier-Reihen	1244
86.4	Die Parseval-Formel	1244
86.5	Diskrete Fourier-Transformation	1244
86.6	Fourier-Transformation	1244
86.7	Eigenschaften der Fourier-Transformierten	1245
86.8	Der Abtastsatz	1246

87 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen:	
Schnell und einfach	1247
87.1 Einleitung	1247
87.2 Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	1248
87.3 Die zentrale Energieabschätzung für Navier-Stokes . .	1249
87.4 Lions und seine Schule	1250
87.5 Turbulenz: Lipschitz-Stetigkeit zum Exponenten $1/3$? .	1251
87.6 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	1252
87.7 Numerische Methoden	1253
87.8 Die stabilisierte $cG(1)dG(0)$ -Methode	1253
87.9 Die $cG(1)cG(1)$ -Methode	1255
87.10 Die $cG(1)dG(1)$ -Methode	1256
87.11 Neumann-Randbedingungen	1256
87.12 Berechnungsbeispiele	1258
 Literaturverzeichnis	 1263
 Sachverzeichnis	 1265