

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>19</b>
Konventionen in diesem Buch	19
Törichte Annahmen über den Leser	20
Was Sie in diesem Buch finden	20
Was Sie in diesem Buch nicht finden	20
Wie dieses Buch aufgebaut ist	20
Teil I: Einführung	21
Teil II: Vektorrechnung	21
Teil III: Matrizen	21
Teil IV: Lineare Gleichungssysteme	21
Teil V: Der Top-Ten-Teil	22
Spickzettel	22
Symbolle, die in diesem Buch verwendet werden	22
Wie es weitergeht	22
<b>Teil I</b>	
<b>Einführung</b>	<b>23</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Motivation</b>	<b>25</b>
Gestatten: Die Familie der Vektoren, Matrizen und linearen	
Gleichungssysteme	25
Vektoren in Theorie und Praxis	26
Matrizen in Schule, Studium und Beruf	27
Wie Matrizen behandelt werden wollen und wie sie einem behilflich sind	28
<b>Kapitel 2</b>	
<b>Vektorrechnung</b>	<b>31</b>
Was war zuerst da: der Vektor oder der Pfeil?	31
Voll konkret: explizite Schreibweise und Komponenten eines Vektors	33
Der Betrag eines Vektors	36
Beispiele	37
Einheitsvektoren – Voll normal!	38
Rechnen mit Vektoren	40
Addition und Subtraktion von Vektoren	40
Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	45

Linearkombination von Vektoren als »Pfeile«	47
Differenzvektoren	48
Vektoren in der analytischen Geometrie	49
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks	49
Zum Halten von Lasten	51

## **Kapitel 3** **Matrizen**

55

Definition und Form von Matrizen	55
Rechnen mit Matrizen – mehr als nur ein Haufen Zahlen!	57
Addition und Subtraktion von Matrizen	57
Multiplikation von Matrizen	58
Invertieren von Matrizen	60
So sieht sich eine Matrix im Spiegel	60
Der Stammbaum der Matrizen	63
Reelle und komplexe Matrizen	63
Quadratische und nicht-quadratische Matrizen	64
Reguläre und singuläre Matrizen	64
Symmetrische und hermitesche Matrizen	64
Orthogonale und unitäre Matrizen	66
Dreiecksmatrizen	67
Noch speziellere Matrizen ...	68
Matrizen bei der Arbeit	68
Determinante und Umkehrbarkeit von Transformationen	71
Eigenwerte, Eigenvektoren und das Diagonalisieren von Matrizen	71

## **Kapitel 4** **Lösen von linearen Gleichungssystemen**

73

Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme	73
Links- und Rechtsmultiplikation sind zweierlei!	77
Umformen der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems	81

## **Teil II** **Vektorrechnung**

83

## **Kapitel 5** **Vektor mal Vektor = ???**

85

Skalarprodukt: Vektor mal Vektor gleich Zahl	85
Definition und Schreibweisen	85
Wissenswertes zum Skalarprodukt: kurz und knapp	86
Geometrische Bedeutung – endlich wird es anschaulich!	88
Wie berechnet man das Skalarprodukt konkret?	91

Kreuzprodukt: Vektor mal Vektor gleich Vektor	94
Definition und Schreibweise	94
Nützliches zum Vektorprodukt: wieder kurz und knapp	94
Geometrische Bedeutung – endlich wird's wieder anschaulich!	95
Wie rechnet man das Kreuzprodukt konkret aus?	96
Das Spatprodukt – und was ist bitte ein Parallelepiped?	100
Dyadisches Produkt: Vektor mal Vektor gleich Matrix	102
Definition und Schreibweise	102
Dyadisches Produkt zweidimensionaler orthogonaler Einheitsvektoren	102
Dyadisches Produkt von orthogonalen Einheitsvektoren in drei Dimensionen	103

**Kapitel 6****Die Welt der Mathematik besteht aus Vektoren ...****105**

Unser Koordinatensystem ist das Gerüst der Vektor-Welt	105
Kartesische Koordinatensysteme – hier steht alles senkrecht!	105
Beispiele für kartesische Koordinatensysteme	106
Polarkoordinaten – krumme Linien in der Ebene?!	109
Zylinderkoordinaten – Hut ab für die dritte Dimension!	115
Kugelkoordinaten – eine runde Sache	118
Basis und Basistransformationen: Wir wechseln den Blickwinkel!	122
Unter der Lupe: Was versteht man unter einer Basis?	122
Beispiele für Basen	124
Basistransformationen – aus Alt mach Neu	125
Jetzt geht's rund – wir drehen die Basis!	127

**Kapitel 7****Analytische Geometrie – mehr als nur ein paar Bauklötze!****135**

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren	135
Der Vektorzug fährt ein ...	135
Parallele und antiparallele Vektoren	136
Anwendungsaufgabe zur linearen Abhängigkeit von Vektoren	137
Darstellung von Geraden und Ebenen	139
Parameterdarstellung: Jetzt kommen die Vektoren zum Zug!	139
Normalenform: Der senkrechte Vektor zeigt, wo es lang geht!	142
Zusammenfassung	144
Der Klassiker: Schnitte und Abstände von Geraden und Ebenen	144
Schnitte von Geraden mit Ebenen	144
Abstand zwischen Ebene und einer parallelen Gerade	146
Schnitt zweier Ebenen in Parameterdarstellung	147
Schnitt einer Ebene in Parameterdarstellung und einer Ebene in Normalenform	148
Bestimmung des Abstands zweier paralleler Ebenen	149
Parallele und windschiefe Geraden	151

Wir verlassen das Flachland und bauen Körper aus Ebenen	155
Eine Pralinenschachtel in der Vektorrechnung	155
Analytische Geometrie für Fortgeschrittene Teil 1:	
Wir bauen uns einen Tetraeder	157
Analytische Geometrie für Fortgeschrittene Teil 2:	
Wie viel Farbe benötigt man, um einen Dodekaeder anzumalen?	160
Die Sache kommt ins Rollen: Kugeln in der Vektorrechnung	166
Die Kugelgleichung	166
Tangentialebenen	167
Schnitt von Kugeln mit Ebenen	168

**Kapitel 8****Funktionenräume****171**

Können Funktionen Vektoren sein?	171
Ein Skalarprodukt für Funktionen	173
Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Funktionen	174
Funktionen machen es den Vektoren im Anschauungsraum nach	174
Der Funktionenraum der Polynome	175
Monome als Bausteine von Polynomen	175
Orthogonale Funktionen – was bedeutet das?	175
Trigonometrische Funktionen	177
Auf der Suche nach einer Basis	177
Ran ans Werk: Das Skalarprodukt trigonometrischer Funktionen	178
Die Fourierreihe – wir bringen Funktionen zum Schwingen	179
So macht man aus unstetigen Funktionen stetige	180

**Teil III****Matrizen****183****Kapitel 9****Rechenregeln****185**

Assoziativgesetz, Distributivgesetz und Kommutativgesetz für die Addition	185
Addition, Subtraktion und Multiplikation in Aktion	187
Division durch Bildung der Inversen	189
Lineare Abbildungen, Kern und Bild	190
Basistransformationen von Vektoren mittels Matrizen	190
Einführung in lineare Abbildungen und deren Basiswechsel	191

<b>Kapitel 10</b>	
<b>Determinanten</b>	<b>199</b>
Verfahren nach Leibniz	199
Permutationen – da haben wir den (Zahlen)salat!	199
Die Determinantenformel	202
Schachbrettregel und Unterdeterminanten	205
Entwicklung nach Zeilen oder Spalten	207
Spezialfall: $(2 \times 2)$ -Matrizen	211
Spezialfall: $(3 \times 3)$ -Matrizen und Sarrussche Regel	211
Rechenregeln für Determinanten	213
Anwendung: Berechnung des Kreuzprodukts mit der Determinante	214
<b>Kapitel 11</b>	
<b>Invertieren von Matrizen</b>	<b>217</b>
Regularität und Singularität als Indiz für Invertierbarkeit	217
Berechnung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus	219
Bildung der Inversen mittels der Adjunkten	222
Spezialfall: $(2 \times 2)$ - und $(3 \times 3)$ -Matrizen	226
<b>Kapitel 12</b>	
<b>Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisieren von Matrizen</b>	<b>229</b>
Berechnung von Eigenwerten, algebraische Vielfachheit	229
Berechnung der Eigenvektoren, geometrische Vielfachheit	235
Diagonalisieren von Matrizen	241
Algebraische Vielfachheit = Geometrische Vielfachheit	241
Mehrfaches Auftreten von Eigenwerten	243
Algebraische Vielfachheit $\neq$ Geometrische Vielfachheit	244
Besonderheiten von symmetrischen und hermiteschen Matrizen	245
Was sich nicht ändert beim Diagonalisieren	248
Anwendung: Noch einmal Drehungen	250
Anwendung: Quadriken	252
Die Hauptachsen einer Quadrik	255
Anwendung des Verfahrens nach Gram und Schmidt	257
Ein paar Tipps zum Abschluss des Kapitels!	257
Für Fortgeschrittene: Jordansche Normalform	258
Bestimmung der Jordan-Normalform und der Transformationsmatrix	259
<b>Kapitel 13</b>	
<b>Besonders einfache Matrizen</b>	<b>263</b>
Dreiecksmatrizen	263
Diagonalmatrizen	263
Blockdiagonale Matrizen	264

<b>Teil IV</b>	
<b>Lösen von linearen Gleichungssystemen</b>	<b>271</b>
<b>Kapitel 14</b>	
<b>Gauß-Algorithmus in Matrixschreibweise: Vertiefung</b>	<b>273</b>
Erweiterte Koeffizientenmatrix und Zeilenstufenform	273
Rang von Matrizen	274
Systeme mit einer eindeutigen Lösung	276
Systeme ohne Lösung	278
Systeme mit unendlich vielen Lösungen	279
<b>Kapitel 15</b>	
<b>Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe von Parametern</b>	<b>283</b>
Einführung von Parametern und Bilden der Lösung	283
Minus-Eins-Ergänzungstrick: Erzeugung der Zeilennormalform und Ablesen der Lösung	284
<b>Kapitel 16</b>	
<b>Homogene und partikuläre Lösung</b>	<b>287</b>
Bildung der homogenen Lösung	287
Bildung der partikulären Lösung	289
Zusammensetzen beider Lösungen	289
<b>Kapitel 17</b>	
<b>Lösungsweg unter Verwendung der Determinante</b>	<b>291</b>
Aufstellen der zu berechnenden Determinanten und Cramersche Regel	291
Resultate aus der Cramerschen Regel	293
Anwendung: Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit zweier Parameter	293
Anwendung: Die Wronski-Determinante	295
Die Wronski-Determinante in Aktion	296
Lineare Unabhängigkeit im Fall der Monome	297
Lineare Unabhängigkeit im Fall der Sinus- und Kosinusfunktionen	298

**Teil V****Der Top-Ten-Teil****299****Kapitel 18****Zehn häufige Anfängerfehler****301**

Dividieren durch Vektoren – Nein!	301
Matrizen vertauschen nicht!	301
Ein Vektor hängt von den Komponenten und der Basis ab!	301
Verwirrung beim komplexen Skalarprodukt	301
Leichtsinnfehler	302
Vektoren in anderen Koordinatensystemen	302
Einheitskreis – wie bitte?	302
Wurzelziehen aus Quadraten	302
Vorsicht mit der imaginären Einheit	302
Falsche Regeln bei der Berechnung von Determinanten	303

**Kapitel 19****Zehn Tipps für erfolgreiche Prüfungen****305**

Üben, üben, üben!	305
Nachdenken ist die halbe Miete!	305
Ergebnisse kritisch begutachten	305
Üben Sie auch möglichst an verschiedenen Aufgabentypen!	306
Gleichungen müssen stimmig sein!	306
Effizienz von Algorithmen	306
Aussehen von Geraden und Ebenen	306
Denken Sie sich selber Aufgaben aus!	306
Nehmen Sie nicht alles bierernst!	306
Denken Sie an die am häufigsten vorkommenden Fragen!	307

**Stichwortverzeichnis****309**