

Inhaltsverzeichnis

1	Mengenlehre	1
1.1	Definition	1
1.2	Mengenoperationen	2
1.3	Potenzmenge	3
1.4	Mengensysteme	3
1.5	Mengengesetze	4
1.6	Geordnetes Paar	4
1.7	Relation	5
1.8	Äquivalenzrelation	5
2	Inferenzregeln	6
2.1	Modus ponens	6
2.2	Modus tollens	6
2.3	Kontrapositionsregel	6
2.4	Kettenschluss	6
2.5	Notwendig und hinreichend	7
2.6	Logische Verknüpfungen	7
2.7	Vollständige Induktion	9
2.8	Tertium non datur	10
2.9	Zur Widerspruchsfreiheit in der Mengenlehre	10
3	Funktionen und Abbildungen	10
3.1	Definition	10
3.2	Charakteristika	11
3.3	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität	11
3.4	Graph	13
3.5	Bild	13
3.6	Urbild	14
3.7	Komposition	14
3.8	Umkehrfunktion	15
3.9	Spezielle Abbildungen	16
3.10	Metrik	17
3.11	Monotonie	18

3.12	Strenge Monotonie und Injektivität	18
3.13	Monotonie der Umkehrfunktion	19
3.14	Polynome	19
3.15	Die Nullstellenmenge	19
3.16	Rationale Funktionen	20
3.17	Periodizität	21
3.18	Sinus und Cosinus	22
3.19	Monotonie von Sinus und Cosinus	22
3.20	Nullstellen von Sinus und Cosinus	24
3.21	Der Tangens	24
3.22	Der Arcustangens	24
3.23	Einige Funktionswerte von Sinus und Cosinus	24
3.24	Die hyperbolischen Funktionen	26
3.25	Exponentialfunktion und Logarithmus	26
3.26	Die Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion und des Logarithmus	28
3.27	Potenzfunktion	29
4	Komplexe Zahlen	29
4.1	Normalform	29
4.2	Realteil	30
4.3	Imaginärteil	30
4.4	Konjugiert komplexes von z	30
4.5	Betrag von z	30
4.6	Rechenregeln	30
4.7	Polardarstellung	30
4.8	Formel von Moivre	31
4.9	Fundamentalsatz der Algebra	31
5	Folgen und Reihen	32
5.1	Definition	32
5.2	Konvergenz, Grenzwerte	32
5.3	Der “Grenzwert” $\pm\infty$	33
5.4	Rechenregeln für konvergente Folgen	33
5.5	Die Sandwich-Regel	34

5.6	Die Wurzelregel	35
5.7	Cauchy-Folgen	35
5.8	Das Cauchy-Kriterium: Über die Konvergenz von Cauchy-Folgen	35
5.9	Monotonie	36
5.10	Beschränktheit	36
5.11	Bolzano-Weierstraß	36
5.12	Reihen	37
5.13	Rechenregeln für Reihen	37
5.14	Die geometrische Reihe	37
5.15	Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Reihe $\sum a_k$ und der Konvergenz der Folge a_n	38
5.16	Das Cauchy-Kriterium für Reihen	38
5.17	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$	39
5.18	Absolute Konvergenz	39
5.19	Das Majorantenkriterium	40
5.20	Das Minorantenkriterium	40
5.21	Das Quotientenkriterium	40
5.22	Potenzreihen	41
5.23	Das Leibniz-Kriterium	43
6	Stetigkeit	43
6.1	Definition	43
6.2	Rechenregeln	44
6.3	$\varepsilon - \delta$ -Definition	44
6.4	Der Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$	45
6.5	Der Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$	45
6.6	Extrema stetiger Funktionen auf kompakten Mengen	46
6.7	Der Zwischenwertsatz	46
7	Differenzierbarkeit	47
7.1	Definition	47
7.2	Bemerkung	47
7.3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	47
7.4	Rechenregeln für differenzierbare Funktionen	48
7.5	Differentiationsregeln für auf \mathbb{R} konvergente Potenzreihen	49

7.6	Differentiation der Umkehrfunktion	50
7.7	Die Kettenregel	50
7.8	Extrema	50
7.9	Notwendiges Kriterium	51
7.10	Hinreichendes Kriterium	51
7.11	Der Satz von Rolle	52
7.12	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	52
7.13	Satz von de l'Hospital	53
7.14	Der Satz von de l'Hospital für den Ausdruck $0 \cdot \infty$	54
7.15	Der Satz von de l'Hospital für den Ausdruck $\infty - \infty$	54
7.16	Der Satz von de l'Hospital für die Ausdrücke ∞^0 und 0^0	55
7.17	Wichtige Bemerkung	55
7.18	Der Satz von Taylor	55
8	Integralrechnung	56
8.1	Bemerkung	56
8.2	Definition der Stammfunktion	56
8.3	Grundintegrale	57
8.4	Integrationsregeln	57
8.5	Häufig verwendete Substitutionen	58
8.6	Partielle Integration	59
8.7	Bestimmte Integrale	60
8.8	Rechenregeln für bestimmte Integrale	60
8.9	1. Mittelwertsatz der Integralrechnung	60
8.10	2. Mittelwertsatz der Integralrechnung	61
8.11	Ableitung nach der oberen Grenze	61
8.12	Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung	61
8.13	Geometrische Deutung des bestimmten Integrals	61
8.14	Integration von Potenzreihen	62
8.15	Uneigentliche Integrale	62
8.16	Näherungsformeln	63
	8.16.1 Rechteckformel	64
	8.16.2 Trapezformel	64
	8.16.3 Simpson-Regel (nur für gerades n)	64
	8.16.4 Keplersche Fassregel	64

9	Determinanten und quadratische LGS	65
9.1	Matrizen	65
9.2	Determinanten und ihre Spalten-Entwicklung	65
9.3	Wohldefiniertheit der Determinante	66
9.4	Die transponierte Matrix	66
9.5	Lineare Gleichungssysteme	67
9.6	Matrizenmultiplikation	67
9.7	Lösungen einer linearen Gleichung	68
9.8	Lösungen eines linearen Gleichungssystems	68
9.9	Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit eines LGS und der Determinante der Koeffizientenmatrix	69
9.10	Definition	69
9.11	Die Cramersche Regel	70
9.12	Matrixumformungen zur Berechnung der Determinante	70
9.13	Der Determinanten-Multiplikationssatz	70
9.14	Die Einheitsmatrix	71
9.15	Die inverse Matrix	71
9.16	Eigenwerte, Eigenvektoren und charakteristisches Polynom	74
9.17	Nützliches Kriterium und Beispiel	76
10	Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n	77
10.1	n-dimensionaler Raum	77
10.2	Lineare Abbildungen	77
10.3	Norm	77
10.4	Einheitsvektoren	78
10.5	n-dimensionale Kugeln	78
10.6	Offene Mengen	78
10.7	Folgen im \mathbb{R}^n	79
10.8	Konvergenz	79
10.9	Komponentenfunktionen	79
10.10	Grenzwerte im \mathbb{R}^n	80
10.11	Totale Differenzierbarkeit	81
10.12	Totales Differenzierbarkeitskriterium	81
10.13	Richtungs- und partielle Ableitungen	82
10.14	Höhere partielle Ableitungen	83

10.15 Gradient	83
10.16 Umgebungen	83
10.17 Zusammenhang totale und partielle Differenzierbarkeit	84
10.18 Lokale Extrema	84
10.19 Notwendiges Kriterium für Extrema	84
10.20 Positiv-definite Matrizen	85
10.21 Hurwitz-Kriterium für positive Definitheit	85
10.22 Positive Definitheit und Eigenwerte	86
10.23 Hesse-Matrix	86
10.24 Satz von Schwarz	86
10.25 Hinreichendes Kriterium für Extrema	86
10.26 Jacobi-Matrix	87
11 Kombinatorik	89
11.1 Fakultät	89
11.2 Binomialkoeffizient	89
11.3 Permutation	90
11.4 k-Permutationen	90
11.5 Formeln für k-Permutationen	91
11.6 k-Kombinationen	92
11.7 Formeln für k-Kombinationen	93
11.8 Teilmengenanzahl einer endlichen Menge	93
11.9 Weitere Rechenregeln für Mengen	94
11.10 Siebformel	95
12 Wahrscheinlichkeitstheorie	96
12.1 Charakteristische Funktion	96
12.2 Sigma-Algebra	97
12.3 Von einer Menge erzeugte Sigma-Algebra	98
12.4 Beispiele	98
12.5 Meßraum	98
12.6 Wahrscheinlichkeitsmaß	99
12.7 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	99
12.8 Formel von Poincaré-Sylvester	100
12.9 Bedingte Wahrscheinlichkeit	101

12.10	Totale Wahrscheinlichkeit	102
12.11	Spezialfall der Formel von Bayes	103
12.12	Unabhängigkeit von zwei Ereignissen	103
12.13	Unabhängigkeit von n Ereignissen	104
12.14	Dichte	104
12.15	Durch Dichten induzierte Wahrscheinlichkeitsmaße	105
12.16	Zufallsvariable	106
12.17	Konvention	107
12.18	Verteilungsfunktion	107
12.19	P-verteilte Zufallsvariablen	110
12.20	Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen	110
12.21	Erwartungswert	111
12.22	Erwartungswert der Komposition von Zufallsvariablen	112
12.23	Formel für den Erwartungswert nicht-negativer Zufallsvariablen	113
12.24	Rechenregeln für Erwartungswerte	113
12.25	Varianz	113
12.26	Verschiebungsformel	114
12.27	Covarianz	114
12.28	Kriterien für Unkorreliertheit	115