

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>13</b>
1.1	Skalare und Vektoren . . . . .	13
1.2	Addition von Vektoren . . . . .	16
1.2.1	Summe zweier Vektoren: Geometrische Addition . . . . .	16
1.3	Subtraktion von Vektoren . . . . .	17
1.3.1	Der Gegenvektor . . . . .	17
1.3.2	Differenz zweier Vektoren: Geometrische Subtraktion . . . . .	18
1.4	Das rechtwinklige Koordinatensystem . . . . .	19
1.5	Komponente und Projektion eines Vektors . . . . .	20
1.6	Komponentendarstellung im Koordinatensystem . . . . .	22
1.6.1	Ortsvektoren . . . . .	22
1.6.2	Einheitsvektoren . . . . .	23
1.6.3	Komponentendarstellung eines Vektors . . . . .	24
1.6.4	Summe zweier Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .	25
1.6.5	Differenz von Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .	27
1.7	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	28
1.8	Betrag eines Vektors . . . . .	29
1.9	Übungsaufgaben . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Skalarprodukt, Vektorprodukt</b>	<b>37</b>
2.1	Skalarprodukt . . . . .	37
2.1.1	Sonderfälle . . . . .	40
2.1.2	Kommutativ- und Distributivgesetz . . . . .	40
2.2	Kosinussatz . . . . .	40
2.3	Skalares Produkt in Komponentendarstellung . . . . .	41
2.4	Vektorprodukt . . . . .	42
2.4.1	Drehmoment . . . . .	42

\*Die mit einem Stern (\*) gekennzeichneten Abschnitte werden beim ersten Durchgang anhand der Leitprogramme übersprungen.

2.4.2	Das Drehmoment als Vektor . . . . .	43
2.4.3	Definition des Vektorprodukts . . . . .	44
2.4.4	Sonderfälle . . . . .	45
2.4.5	Vertauschung der Reihenfolge . . . . .	46
2.4.6	Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes . . . . .	46
2.5	Vektorprodukt in Komponentendarstellung . . . . .	47
2.6	Übungsaufgaben . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Einfache Funktionen, Trigonometrische Funktionen</b>	<b>53</b>
3.1	Der mathematische Funktionsbegriff . . . . .	53
3.1.1	Der Funktionsbegriff . . . . .	53
3.2	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	56
3.2.1	Ermittlung des Graphen aus der Gleichung für die Gerade . .	57
3.2.2	Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus ihrem Graphen	59
3.2.3	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	60
3.2.4	Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen .	62
3.3	Winkelfunktionen, Trigonometrische Funktionen . . . . .	63
3.3.1	Einheitskreis . . . . .	63
3.3.2	Sinusfunktion . . . . .	64
3.3.3	Kosinusfunktion . . . . .	71
3.3.4	Zusammenhang zwischen Kosinus- und Sinusfunktion . . . .	72
3.3.5	Tangens, Kotangens . . . . .	73
3.3.6	Additionstheoreme, Superposition von Trigonometrischen Funktionen . . . . .	74
3.4	Übungsaufgaben . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Potenzen, Logarithmus, Umkehrfunktionen</b>	<b>82</b>
4.1	Potenzen, Exponentialfunktion . . . . .	82
4.1.1	Potenzen . . . . .	82
4.1.2	Rechenregeln für Potenzen . . . . .	83
4.1.3	Exponentialfunktion . . . . .	84
4.2	Logarithmus, Logarithmusfunktion . . . . .	86
4.2.1	Logarithmus . . . . .	86
4.2.2	Rechenregeln für Logarithmen . . . . .	89

4.2.3	Logarithmusfunktion . . . . .	91
4.3	Hyperbolische Funktionen* . . . . .	92
4.4	Umkehrfunktionen, inverse Funktionen . . . . .	94
4.4.1	Umkehrfunktion oder inverse Funktion . . . . .	94
4.4.2	Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: Arcusfunktionen* . . . . .	96
4.4.3	Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen: Areafunktionen* . . . . .	98
4.4.4	Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: . . . . .	99
4.5	Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion . . . . .	99
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>103</b>
5.1	Folge und Grenzwert . . . . .	103
5.1.1	Die Zahlenfolge . . . . .	103
5.1.2	Grenzwert einer Zahlenfolge . . . . .	104
5.1.3	Grenzwert einer Funktion . . . . .	106
5.2	Stetigkeit . . . . .	108
5.3	Reihe und Grenzwert . . . . .	109
5.3.1	Reihe . . . . .	109
5.3.2	Geometrische Reihe . . . . .	111
5.4	Die Ableitung einer Funktion . . . . .	112
5.4.1	Die Steigung einer Geraden . . . . .	112
5.4.2	Die Steigung einer beliebigen Kurve . . . . .	112
5.4.3	Der Differentialquotient . . . . .	114
5.4.4	Physikalische Anwendung: Die Geschwindigkeit . . . . .	115
5.4.5	Das Differential . . . . .	116
5.5	Praktische Berechnung des Differentialquotienten . . . . .	117
5.5.1	Differentiationsregeln . . . . .	117
5.5.2	Ableitung einfacher Funktionen . . . . .	119
5.5.3	Ableitung komplizierter Funktionen . . . . .	123
5.6	Höhere Ableitungen . . . . .	125
5.7	Maxima und Minima . . . . .	126

5.8	Differentiationsregeln, Ableitung einfacher Funktionen . . . . .	129
5.9	Tangentenvektor und Normalenvektor . . . . .	130
5.10	Übungsaufgaben . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>134</b>
6.1	Die Stammfunktion . . . . .	134
6.2	Flächenproblem und bestimmtes Integral . . . . .	136
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	138
6.4	Bestimmtes Integral . . . . .	141
6.4.1	Beispiele für das bestimmte Integral . . . . .	143
6.5	Zur Technik des Integrierens . . . . .	145
6.5.1	Verifizierungsprinzip . . . . .	145
6.5.2	Stammintegrale . . . . .	146
6.5.3	Konstanter Faktor und Summe . . . . .	147
6.5.4	Integration durch Substitution . . . . .	147
6.5.5	Partielle Integration . . . . .	149
6.6	Rechenregeln für bestimmte Integrale . . . . .	150
6.7	Substitution bei bestimmten Integralen . . . . .	151
6.8	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	153
6.9	Uneigentliche Integrale . . . . .	153
6.10	Arbeit im Gravitationsfeld . . . . .	155
6.11	Übungsaufgaben . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Taylorreihe und Potenzreihen</b>	<b>163</b>
7.1	Vorbemerkung . . . . .	163
7.2	Entwicklung einer Funktion in eine Taylorreihe . . . . .	164
7.3	Gültigkeitsbereich der Taylorentwicklung (Konvergenzbereich) . . . . .	168
7.4	Das Näherungspolynom . . . . .	169
7.4.1	Abschätzung des Fehlers . . . . .	171
7.5	Allgemeine Taylorreihenentwicklung . . . . .	172
7.6	Nutzen der Taylorreihenentwicklung . . . . .	173
7.6.1	Polynome als Näherungsfunktionen . . . . .	173
7.6.2	Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome . . . . .	176
7.6.3	Integration über Potenzreihenentwicklung . . . . .	177
7.7	Übungsaufgaben . . . . .	179

<b>8 Komplexe Zahlen</b>	<b>183</b>
8.1 Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen . . . . .	183
8.1.1 Die imaginäre Zahl . . . . .	183
8.1.2 Komplexe Zahlen . . . . .	183
8.1.3 Anwendungsgebiete . . . . .	184
8.1.4 Rechenregeln für komplexe Zahlen . . . . .	184
8.2 Komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene . . . . .	186
8.2.1 Die Gauß'sche Zahlenebene . . . . .	186
8.2.2 Komplexe Zahlen in der Schreibweise mit Winkelfunktionen .	187
8.3 Die Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .	189
8.3.1 Eulersche Formel . . . . .	189
8.3.2 Umkehrformeln zur Eulerschen Formel . . . . .	190
8.3.3 Komplexe Zahlen als Exponenten . . . . .	190
8.3.4 Multiplikation und Division komplexer Zahlen . . . . .	193
8.3.5 Potenzieren und Wurzelziehen komplexer Zahlen . . . . .	194
8.3.6 Periodizität von $r \cdot e^{i\alpha}$ . . . . .	195
8.4 Übungsaufgaben . . . . .	197
<b>9 Differentialgleichungen</b>	<b>202</b>
9.1 Begriff der Differentialgleichung, Einteilung der Differentialgleichungen	202
9.1.1 Begriff der Differentialgleichung, Separation der Variablen . .	202
9.1.2 Einteilung der Differentialgleichungen . . . . .	203
9.2 Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 1. und 2. Ordnung . . . . .	206
9.2.1 Lösung homogener linearer Differentialgleichungen, der Exponentialansatz . . . . .	206
9.2.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	213
9.3 Variation der Konstanten* . . . . .	218
9.3.1 Variation der Konstanten für den Fall einer Doppelwurzel . .	218
9.3.2 Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung . . . . .	220
9.4 Randwertprobleme . . . . .	221
9.4.1 Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 1. Ordnung . .	221

9.4.2	Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung . .	222
9.5	Anwendungen . . . . .	224
9.5.1	Der radioaktive Zerfall . . . . .	224
9.5.2	Der harmonische ungedämpfte Oszillator . . . . .	224
9.6	Übungsaufgaben . . . . .	233
<b>10</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>237</b>
10.1	Einleitung . . . . .	237
10.2	Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	238
10.2.1	Ereignis, Ergebnis, Zufallsexperiment . . . . .	238
10.2.2	Die „klassische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	239
10.2.3	Die „statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	240
10.2.4	Allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten . . . . .	242
10.2.5	Wahrscheinlichkeit für Verbundereignisse . . . . .	244
10.3	Abzählmethoden . . . . .	247
10.3.1	Permutationen . . . . .	247
10.3.2	Kombinationen . . . . .	249
10.4	Übungsaufgaben . . . . .	251
<b>11</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	<b>252</b>
11.1	Diskrete und kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . .	252
11.1.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	252
11.1.2	Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	254
11.2	Mittelwert . . . . .	257
11.3	Binomialverteilung und Normalverteilung . . . . .	259
11.3.1	Eigenschaften der Normalverteilung . . . . .	261
11.3.2	Herleitung der Binomialverteilung . . . . .	264
11.4	Anhang A . . . . .	266
11.5	Übungsaufgaben . . . . .	269
<b>12</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>270</b>
12.1	Aufgabe der Fehlerrechnung . . . . .	270
12.2	Mittelwert und Varianz . . . . .	271
12.2.1	Mittelwert . . . . .	271

12.2.2 Varianz . . . . .	271
12.2.3 Mittelwert und Varianz in Stichprobe und Grundgesamtheit .	273
12.2.4 Fehler des Mittelwerts . . . . .	275
12.3 Mittelwert und Varianz bei kontinuierlichen Verteilungen . . . . .	276
12.4 Normalverteilung . . . . .	277
12.4.1 Verteilung von Zufallsfehlern . . . . .	277
12.4.2 Vertrauensintervall oder Konfidenzintervall . . . . .	278
12.5 Gewogenes Mittel . . . . .	279
12.6 Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	280
12.7 Regressionsgerade, Korrelation . . . . .	281
12.7.1 Regressionsgerade, Ausgleichskurve . . . . .	281
12.7.2 Korrelation und Korrelationskoeffizient . . . . .	285
12.8 Übungsaufgaben . . . . .	288
<b>Anhang</b>	<b>292</b>
Grundbegriffe der Mengenlehre . . . . .	292
Funktionsbegriff . . . . .	294
Quadratische Gleichungen . . . . .	295
Der Computer als Hilfsmittel bei mathematischen Aufgaben. . . . .	296
<b>Literatur</b>	<b>298</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>299</b>