

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vektorrechnung</b>	<b>13</b>
1.1 Skalare und Vektoren . . . . .	13
1.2 Addition von Vektoren . . . . .	16
1.2.1 Summe zweier Vektoren: Geometrische Addition . . . . .	16
1.3 Subtraktion von Vektoren . . . . .	17
1.3.1 Der Gegenvektor . . . . .	17
1.3.2 Differenz zweier Vektoren: Geometrische Subtraktion . . . . .	18
1.4 Das rechtwinklige Koordinatensystem . . . . .	19
1.5 Komponente und Projektion eines Vektors . . . . .	20
1.6 Komponentendarstellung im Koordinatensystem . . . . .	22
1.6.1 Ortsvektoren . . . . .	22
1.6.2 Einheitsvektoren . . . . .	23
1.6.3 Komponentendarstellung eines Vektors . . . . .	24
1.6.4 Summe zweier Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .	25
1.6.5 Differenz von Vektoren in Komponentenschreibweise . . . . .	27
1.7 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	28
1.8 Betrag eines Vektors . . . . .	29
1.9 Übungsaufgaben . . . . .	31
<b>2 Skalarprodukt, Vektorprodukt</b>	<b>37</b>
2.1 Skalarprodukt . . . . .	37
2.1.1 Sonderfälle . . . . .	40
2.1.2 Kommutativ- und Distributivgesetz . . . . .	40
2.2 Kosinussatz . . . . .	40
2.3 Skalares Produkt in Komponentendarstellung . . . . .	41
2.4 Vektorprodukt . . . . .	42
2.4.1 Drehmoment . . . . .	42

\*Die mit einem Stern (\*) gekennzeichneten Abschnitte werden beim ersten Durchgang anhand der Leitprogramme übersprungen.

2.4.2	Das Drehmoment als Vektor . . . . .	43
2.4.3	Definition des Vektorprodukts . . . . .	44
2.4.4	Sonderfälle . . . . .	45
2.4.5	Vertauschung der Reihenfolge . . . . .	46
2.4.6	Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes . . . . .	46
2.5	Vektorprodukt in Komponentendarstellung . . . . .	47
2.6	Übungsaufgaben . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Einfache Funktionen, Trigonometrische Funktionen</b>	<b>53</b>
3.1	Der mathematische Funktionsbegriff . . . . .	53
3.1.1	Der Funktionsbegriff . . . . .	53
3.2	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	56
3.2.1	Ermittlung des Graphen aus der Gleichung für die Gerade . .	57
3.2.2	Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus ihrem Graphen	59
3.2.3	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	60
3.2.4	Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen .	62
3.3	Winkelfunktionen, Trigonometrische Funktionen . . . . .	63
3.3.1	Einheitskreis . . . . .	63
3.3.2	Sinusfunktion . . . . .	64
3.3.3	Kosinusfunktion . . . . .	71
3.3.4	Zusammenhang zwischen Kosinus- und Sinusfunktion . . .	72
3.3.5	Tangens, Kotangens . . . . .	73
3.3.6	Additionstheoreme, Superposition von Trigonometrischen Funktionen . . . . .	74
3.4	Übungsaufgaben . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Potenzen, Logarithmus, Umkehrfunktionen</b>	<b>82</b>
4.1	Potenzen, Exponentialfunktion . . . . .	82
4.1.1	Potenzen . . . . .	82
4.1.2	Rechenregeln für Potenzen . . . . .	83
4.1.3	Exponentialfunktion . . . . .	84
4.2	Logarithmus, Logarithmusfunktion . . . . .	86
4.2.1	Logarithmus . . . . .	86
4.2.2	Rechenregeln für Logarithmen . . . . .	89

4.2.3	<b>Logarithmusfunktion</b>	91
4.3	<b>Hyperbolische Funktionen*</b>	92
4.4	<b>Umkehrfunktionen, inverse Funktionen</b>	94
4.4.1	<b>Umkehrfunktion oder inverse Funktion</b>	94
4.4.2	<b>Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: Arcusfunktionen*</b>	96
4.4.3	<b>Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen; Areafunktionen*</b>	98
4.4.4	<b>Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:</b>	99
4.5	<b>Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion</b>	99
4.6	<b>Übungsaufgaben</b>	101
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>103</b>
5.1	<b>Folge und Grenzwert</b>	103
5.1.1	<b>Die Zahlenfolge</b>	103
5.1.2	<b>Grenzwert einer Zahlenfolge</b>	104
5.1.3	<b>Grenzwert einer Funktion</b>	106
5.2	<b>Stetigkeit</b>	108
5.3	<b>Reihe und Grenzwert</b>	109
5.3.1	<b>Reihe</b>	109
5.3.2	<b>Geometrische Reihe</b>	111
5.4	<b>Die Ableitung einer Funktion</b>	112
5.4.1	<b>Die Steigung einer Geraden</b>	112
5.4.2	<b>Die Steigung einer beliebigen Kurve</b>	112
5.4.3	<b>Der Differentialquotient</b>	114
5.4.4	<b>Physikalische Anwendung: Die Geschwindigkeit</b>	115
5.4.5	<b>Das Differential</b>	116
5.5	<b>Praktische Berechnung des Differentialquotienten</b>	117
5.5.1	<b>Differentiationsregeln</b>	117
5.5.2	<b>Ableitung einfacher Funktionen</b>	119
5.5.3	<b>Ableitung komplizierter Funktionen</b>	123
5.6	<b>Höhere Ableitungen</b>	125
5.7	<b>Maxima und Minima</b>	126

5.8	Differentiationsregeln, Ableitung einfacher Funktionen . . . . .	129
5.9	Tangentenvektor und Normalenvektor . . . . .	130
5.10	Übungsaufgaben . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>134</b>
6.1	Die Stammfunktion . . . . .	134
6.2	Flächenproblem und bestimmtes Integral . . . . .	136
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	138
6.4	Bestimmtes Integral . . . . .	141
6.4.1	Beispiele für das bestimmte Integral . . . . .	143
6.5	Zur Technik des Integrierens . . . . .	145
6.5.1	Verifizierungsprinzip . . . . .	145
6.5.2	Stammintegrale . . . . .	146
6.5.3	Konstanter Faktor und Summe . . . . .	147
6.5.4	Integration durch Substitution . . . . .	147
6.5.5	Partielle Integration . . . . .	149
6.6	Rechenregeln für bestimmte Integrale . . . . .	150
6.7	Substitution bei bestimmten Integralen . . . . .	151
6.8	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	153
6.9	Uneigentliche Integrale . . . . .	153
6.10	Arbeit im Gravitationsfeld . . . . .	155
6.11	Übungsaufgaben . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Taylorreihe und Potenzreihen</b>	<b>163</b>
7.1	Vorbemerkung . . . . .	163
7.2	Entwicklung einer Funktion in eine Taylorreihe . . . . .	164
7.3	Gültigkeitsbereich der Taylorentwicklung (Konvergenzbereich) . . . . .	168
7.4	Das Näherungspolynom . . . . .	169
7.4.1	Abschätzung des Fehlers . . . . .	171
7.5	Allgemeine Taylorreihenentwicklung . . . . .	172
7.6	Nutzen der Taylorreihenentwicklung . . . . .	173
7.6.1	Polynome als Näherungsfunktionen . . . . .	173
7.6.2	Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome . . . . .	176
7.6.3	Integration über Potenzreihenentwicklung . . . . .	177
7.7	Übungsaufgaben . . . . .	179

<b>8 Komplexe Zahlen</b>	<b>183</b>
8.1 Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen . . . . .	183
8.1.1 Die imaginäre Zahl . . . . .	183
8.1.2 Komplexe Zahlen . . . . .	183
8.1.3 Anwendungsgebiete . . . . .	184
8.1.4 Rechenregeln für komplexe Zahlen . . . . .	184
8.2 Komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene . . . . .	186
8.2.1 Die Gauß'sche Zahlenebene . . . . .	186
8.2.2 Komplexe Zahlen in der Schreibweise mit Winkelfunktionen .	187
8.3 Die Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .	189
8.3.1 Eulersche Formel . . . . .	189
8.3.2 Umkehrformeln zur Eulerschen Formel . . . . .	190
8.3.3 Komplexe Zahlen als Exponenten . . . . .	190
8.3.4 Multiplikation und Division komplexer Zahlen . . . . .	193
8.3.5 Potenzieren und Wurzelziehen komplexer Zahlen . . . . .	194
8.3.6 Periodizität von $r \cdot e^{i\alpha}$ . . . . .	195
8.4 Übungsaufgaben . . . . .	197
<b>9 Differentialgleichungen</b>	<b>202</b>
9.1 Begriff der Differentialgleichung, Einteilung der Differentialgleichungen	202
9.1.1 Begriff der Differentialgleichung, Separation der Variablen .	202
9.1.2 Einteilung der Differentialgleichungen . . . . .	203
9.2 Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 1. und 2. Ordnung . . . . .	206
9.2.1 Lösung homogener linearer Differentialgleichungen, der Exponentialansatz . . . . .	206
9.2.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	213
9.3 Variation der Konstanten* . . . . .	218
9.3.1 Variation der Konstanten für den Fall einer Doppelwurzel .	218
9.3.2 Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung . . . . .	220
9.4 Randwertprobleme . . . . .	221
9.4.1 Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 1. Ordnung .	221

9.4.2 Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	222
9.5 Anwendungen . . . . .	224
9.5.1 Der radioaktive Zerfall . . . . .	224
9.5.2 Der harmonische ungedämpfte Oszillatator . . . . .	224
9.6 Übungsaufgaben . . . . .	233
<b>10 Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	<b>237</b>
10.1 Einleitung . . . . .	237
10.2 Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	238
10.2.1 Ereignis, Ergebnis, Zufallsexperiment . . . . .	238
10.2.2 Die „klassische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	239
10.2.3 Die „statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	240
10.2.4 Allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten . . . . .	242
10.2.5 Wahrscheinlichkeit für Verbundereignisse . . . . .	244
10.3 Abzählmethoden . . . . .	247
10.3.1 Permutationen . . . . .	247
10.3.2 Kombinationen . . . . .	249
10.4 Übungsaufgaben . . . . .	251
<b>11 Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b> . . . . .	<b>252</b>
11.1 Diskrete und kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	252
11.1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	252
11.1.2 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	254
11.2 Mittelwert . . . . .	257
11.3 Binomialverteilung und Normalverteilung . . . . .	259
11.3.1 Eigenschaften der Normalverteilung . . . . .	261
11.3.2 Herleitung der Binomialverteilung . . . . .	264
11.4 Anhang A . . . . .	266
11.5 Übungsaufgaben . . . . .	269
<b>12 Fehlerrechnung</b> . . . . .	<b>270</b>
12.1 Aufgabe der Fehlerrechnung . . . . .	270
12.2 Mittelwert und Varianz . . . . .	271
12.2.1 Mittelwert . . . . .	271

12.2.2 Varianz . . . . .	271
12.2.3 Mittelwert und Varianz in Stichprobe und Grundgesamtheit . . . . .	273
12.2.4 Fehler des Mittelwerts . . . . .	275
12.3 Mittelwert und Varianz bei kontinuierlichen Verteilungen . . . . .	276
12.4 Normalverteilung . . . . .	277
12.4.1 Verteilung von Zufallsfehlern . . . . .	277
12.4.2 Vertrauensintervall oder Konfidenzintervall . . . . .	278
12.5 Gewogenes Mittel . . . . .	279
12.6 Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	280
12.7 Regressionsgerade, Korrelation . . . . .	281
12.7.1 Regressionsgerade, Ausgleichskurve . . . . .	281
12.7.2 Korrelation und Korrelationskoeffizient . . . . .	285
12.8 Übungsaufgaben . . . . .	288
<b>Anhang</b>	<b>292</b>
Grundbegriffe der Mengenlehre . . . . .	292
Funktionsbegriff . . . . .	294
Quadratische Gleichungen . . . . .	295
Der Computer als Hilfsmittel bei mathematischen Aufgaben. . . . .	296
<b>Literatur</b>	<b>298</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>299</b>