

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Historische Notizen</b>	<b>1</b>
1.1	Wahrheit und Beweisbarkeit . . . . .	1
1.2	Der Weg zur modernen Mathematik . . . . .	7
1.2.1	Rätsel des Kontinuums . . . . .	7
1.2.2	Auf den Spuren der Unendlichkeit . . . . .	13
1.2.3	Macht der Symbole . . . . .	27
1.2.4	Aufbruch in ein neues Jahrhundert . . . . .	31
1.2.5	Grundlagenkrise . . . . .	36
1.2.6	Axiomatische Mengenlehre . . . . .	42
1.2.7	Hilberts Programm und Gödels Beitrag . . . . .	44
1.2.8	Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	53
1.2.9	Auferstanden aus Ruinen . . . . .	61
1.3	Übungsaufgaben . . . . .	67
<b>2</b>	<b>Formale Systeme</b>	<b>71</b>
2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	71
2.2	Entscheidungsverfahren . . . . .	83
2.3	Aussagenlogik . . . . .	87
2.3.1	Syntax und Semantik . . . . .	87
2.3.2	Aussagenlogischer Kalkül . . . . .	93
2.4	Prädikatenlogik erster Stufe . . . . .	103
2.4.1	Syntax und Semantik . . . . .	104
2.4.2	Prädikatenlogischer Kalkül . . . . .	109
2.5	Prädikatenlogik mit Gleichheit . . . . .	112
2.6	Prädikatenlogik höherer Stufe . . . . .	117
2.6.1	Syntax und Semantik . . . . .	117
2.6.2	Henkin-Interpretation . . . . .	121
2.7	Übungsaufgaben . . . . .	124
<b>3</b>	<b>Fundamente der Mathematik</b>	<b>133</b>
3.1	Peano-Arithmetik . . . . .	134
3.1.1	Syntax . . . . .	134
3.1.2	Semantik . . . . .	135
3.1.3	Axiome und Schlussregeln . . . . .	139

3.2	Axiomatische Mengenlehre . . . . .	147
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre . . . . .	149
3.2.1.1	ZF-Axiome . . . . .	150
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom . . . . .	158
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik . . . . .	164
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen . . . . .	172
3.2.2	Ordinalzahlen . . . . .	174
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	174
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen . . . . .	179
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen . . . . .	186
3.2.2.4	Transfinite Induktion . . . . .	189
3.2.3	Kardinalzahlen . . . . .	192
3.3	Übungsaufgaben . . . . .	194
<b>4</b>	<b>Beweistheorie</b>	<b>199</b>
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze . . . . .	199
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz . . . . .	200
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax . . . . .	204
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen . . . . .	209
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit . . . . .	211
4.2.4	Gödels Diagonalargument . . . . .	218
4.2.5	Rossers Beitrag . . . . .	225
4.2.6	Das Diagonalisierungslemma . . . . .	228
4.2.7	Das Wahrheitsprädikat von Tarski . . . . .	233
4.2.8	Das Berry-Paradoxon . . . . .	238
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz . . . . .	242
4.3.1	Hilbert-Bernays-Löb-Kriterien . . . . .	245
4.3.2	Der Satz von Löb . . . . .	247
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen . . . . .	252
4.5	Der Satz von Goodstein . . . . .	258
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	265
<b>5</b>	<b>Berechenbarkeitstheorie</b>	<b>269</b>
5.1	Berechnungsmodelle . . . . .	270
5.1.1	Turing-Maschinen . . . . .	270
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells . . . . .	274
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen . . . . .	276
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine . . . . .	279
5.1.2	Registermaschinen . . . . .	284
5.2	Die Church'sche These . . . . .	287
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit . . . . .	294
5.3.1	Das Halteproblem . . . . .	294

5.3.2	Der Satz von Rice . . . . .	297
5.4	Folgen für die Mathematik . . . . .	299
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1 . . . . .	300
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik . . . . .	307
5.4.3	Hilberts zehntes Problem . . . . .	315
5.4.3.1	Diophantische Repräsentierbarkeit . . . . .	318
5.4.3.2	Codierung von Registermaschinen . . . . .	320
5.5	Übungsaufgaben . . . . .	331
<b>6</b>	<b>Algorithmische Informationstheorie</b>	<b>339</b>
6.1	Algorithmische Komplexität . . . . .	340
6.2	Die Chaitin'sche Konstante . . . . .	348
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme . . . . .	358
6.4	Übungsaufgaben . . . . .	361
<b>7</b>	<b>Modelltheorie</b>	<b>365</b>
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik . . . . .	366
7.1.1	Modellexistenzsatz . . . . .	369
7.1.2	Kompaktheitssatz . . . . .	371
7.1.3	Satz von Löwenheim-Skolem . . . . .	375
7.2	Nichtstandardmodelle von PA . . . . .	378
7.2.1	Abzählbare Nichtstandardmodelle . . . . .	379
7.2.2	Überabzählbare Nichtstandardmodelle . . . . .	382
7.3	Das Skolem-Paradoxon . . . . .	389
7.4	Boolesche Modelle . . . . .	396
7.4.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	397
7.4.2	Ein einfacher Unabhängigkeitsbeweis . . . . .	402
7.5	Übungsaufgaben . . . . .	409
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>417</b>
<b>Bildnachweis</b>		<b>425</b>
<b>Namensverzeichnis</b>		<b>427</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>		<b>431</b>