

Inhaltsverzeichnis

1 Historische Notizen	1
1.1 Wahrheit und Beweisbarkeit	1
1.2 Der Weg zur modernen Mathematik	7
1.2.1 Rätsel des Kontinuums	7
1.2.2 Auf den Spuren der Unendlichkeit	13
1.2.3 Macht der Symbole	27
1.2.4 Aufbruch in ein neues Jahrhundert	31
1.2.5 Grundlagenkrise	36
1.2.6 Axiomatische Mengenlehre	42
1.2.7 Hilberts Programm und Gödels Beitrag	44
1.2.8 Grenzen der Berechenbarkeit	53
1.2.9 Auferstanden aus Ruinen	61
1.3 Übungsaufgaben	67
2 Formale Systeme	71
2.1 Definition und Eigenschaften	71
2.2 Entscheidungsverfahren	83
2.3 Aussagenlogik	87
2.3.1 Syntax und Semantik	87
2.3.2 Aussagenlogischer Kalkül	93
2.4 Prädikatenlogik erster Stufe	103
2.4.1 Syntax und Semantik	104
2.4.2 Prädikatenlogischer Kalkül	109
2.5 Prädikatenlogik mit Gleichheit	112
2.6 Prädikatenlogik höherer Stufe	117
2.6.1 Syntax und Semantik	117
2.6.2 Henkin-Interpretation	121
2.7 Übungsaufgaben	124
3 Fundamente der Mathematik	133
3.1 Peano-Arithmetik	134
3.1.1 Syntax	134
3.1.2 Semantik	135
3.1.3 Axiome und Schlussregeln	139

3.2	Axiomatische Mengenlehre	147
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre	149
3.2.1.1	ZF-Axiome	150
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom	158
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik	164
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen	172
3.2.2	Ordinalzahlen	174
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften	174
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen	179
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen	186
3.2.2.4	Transfinite Induktion	189
3.2.3	Kardinalzahlen	192
3.3	Übungsaufgaben	194
4	Beweistheorie	199
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze	199
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz	200
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax	204
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen	209
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit	211
4.2.4	Gödels Diagonalargument	218
4.2.5	Rossers Beitrag	225
4.2.6	Das Diagonalisierungslemma	228
4.2.7	Das Wahrheitsprädikat von Tarski	233
4.2.8	Das Berry-Paradoxon	238
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz	242
4.3.1	Hilbert-Bernays-Löb-Kriterien	245
4.3.2	Der Satz von Löb	247
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen	252
4.5	Der Satz von Goodstein	258
4.6	Übungsaufgaben	265
5	Berechenbarkeitstheorie	269
5.1	Berechnungsmodelle	270
5.1.1	Turing-Maschinen	270
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells	274
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen	276
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine	279
5.1.2	Registermaschinen	284
5.2	Die Church'sche These	287
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit	294
5.3.1	Das Halteproblem	294

5.3.2	Der Satz von Rice	297
5.4	Folgen für die Mathematik	299
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1	300
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik	307
5.4.3	Hilberts zehntes Problem	315
5.4.3.1	Diophantische Repräsentierbarkeit	318
5.4.3.2	Codierung von Registermaschinen	320
5.5	Übungsaufgaben	331
6	Algorithmische Informationstheorie	339
6.1	Algorithmische Komplexität	340
6.2	Die Chaitin'sche Konstante	348
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme	358
6.4	Übungsaufgaben	361
7	Modelltheorie	365
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik	366
7.1.1	Modellexistenzsatz	369
7.1.2	Kompaktheitssatz	371
7.1.3	Satz von Löwenheim-Skolem	375
7.2	Nichtstandardmodelle von PA	378
7.2.1	Abzählbare Nichtstandardmodelle	379
7.2.2	Überabzählbare Nichtstandardmodelle	382
7.3	Das Skolem-Paradoxon	389
7.4	Boolesche Modelle	396
7.4.1	Definition und Eigenschaften	397
7.4.2	Ein einfacher Unabhängigkeitsbeweis	402
7.5	Übungsaufgaben	409
	Literaturverzeichnis	417
	Bildnachweis	425
	Namensverzeichnis	427
	Sachwortverzeichnis	431