

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	13
1.1 Die axiomatische Methode	14
1.2 Formale Systeme	18
1.3 Metamathematik	26
1.3.1 Widerspruchsfreiheit	28
1.3.2 Vollständigkeit	31
1.3.3 Hilbert-Programm	33
1.4 Die Unvollständigkeitssätze	38
1.4.1 Der erste Unvollständigkeitssatz	38
1.4.2 Der zweite Unvollständigkeitssatz	39
1.5 Die Gödel'sche Arbeit	40
2 Die formalen Grundlagen der Mathematik	43
2.1 Das logizistische Programm	43
2.1.1 Begriffsschrift	44
2.1.2 Axiome der Begriffsschrift	46
2.1.3 Formalisierung der Arithmetik	49
2.2 Die natürlichen Zahlen	52
2.2.1 Arithmetices principia	53
2.2.2 Axiome der Arithmetices principia	56
2.2.3 Isomorphiesatz von Dedekind	60
2.3 Principia Mathematica	66
2.3.1 Satz von Cantor	70
2.3.2 Die Russell'sche Antinomie	75
2.3.3 Typentheorie	84
2.3.4 Die Logik der Principia	89
2.4 Axiomatische Mengenlehre	97
2.4.1 Kontinuumshypothese	99
2.4.2 Wohlordnungssatz	101
2.4.3 Zermelos Beweis in der Kritik	109
2.4.4 Das Zermelo'sche Axiomensystem	113
3 Beweisskizze	119
3.1 Arithmetische Formeln	120
3.2 Arithmetisierung der Syntax	127
3.3 Ich bin unbeweisbar!	131
3.4 Gödel, Richard und der Lügner	136

3.4.1	Das Lügner-Paradoxon	137
3.4.2	Die Richard'sche Antinomie	139
3.4.3	Wann ist ein formales System betroffen?	142
4	Das System P	147
4.1	Syntax	148
4.1.1	Terme und Formeln	150
4.1.2	Substitutionen	154
4.2	Semantik	157
4.2.1	Definition der Gleichheit	160
4.2.2	Definition der natürlichen Zahlen	162
4.3	Axiome und Schlussregeln	162
4.4	Formale Beweise	168
4.4.1	Aussagenlogische Theoreme	172
4.4.2	Hypothesenbasiertes Beweisen	184
4.4.3	Prädikatenlogische Theoreme	188
4.4.4	Theoreme über die Gleichheit	191
4.4.5	Numerische Theoreme	196
4.5	Arithmetisierung der Syntax	207
5	Primitiv-rekursive Funktionen	213
5.1	Definition und Eigenschaften	213
5.2	Auswahl primitiv-rekursiver Funktionen und Relationen	230
5.3	Entscheidungsverfahren	270
5.4	Satz V	274
6	Die Grenzen der Mathematik	289
6.1	Gödels Hauptresultat	289
6.1.1	Unvollständigkeit des Systems P	292
6.1.2	Folgerungen aus dem Hauptresultat	299
6.2	Der erste Unvollständigkeitssatz	307
6.2.1	Unvollständigkeit der Arithmetik	307
6.2.2	Folgen für den engeren Funktionenkalkül	320
6.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz	340
7	Epilog	349
	Literaturverzeichnis	351
	Bildnachweis	357
	Namensverzeichnis	359
	Sachwortverzeichnis	363