

# Inhaltsverzeichnis

<b>Über den Autor</b>	<b>9</b>
<b>Danksagung</b>	<b>9</b>
<b>Einleitung</b>	<b>19</b>
Zu diesem Buch	19
Konventionen in diesem Buch	20
Törichte Annahmen über den Leser	20
Wie dieses Buch aufgebaut ist	21
Teil I: Mehrdimensionale Analysis für Ingenieure	21
Teil II: Integralrechnung und Vektoranalysis	21
Teil III: Gewöhnliche Differentialgleichungen	22
Teil IV: Funktionentheorie	22
Teil V: Der Top-Ten-Teil	22
Symbole in diesem Buch	23
Wie es weitergeht	23
<b>Teil I</b>	
<b>Mehrdimensionale Analysis für Ingenieure</b>	<b>25</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Was bisher geschah</b>	<b>27</b>
Grundlagen aus der Linearen Algebra	27
Vektor- und Matrizenrechnung	27
Lineare Gleichungssysteme und das Gauß-Verfahren	31
Eigenwerte, Eigenvektoren und die Definitheit von Matrizen	35
Eindimensionale Analysis	37
Folgen, Häufungspunkte und Grenzwerte	37
Grenzwerte reellwertiger Funktionen und Stetigkeit	40
Differenzierbarkeit und Kurvendiskussion	42
Integration	47
<b>Kapitel 2</b>	
<b>Grundlagen der Differenzialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>51</b>
Unsere Welt ist mehrdimensional	51
Viele Variable und ein Funktionswert	51

Einmal sehen ist besser als hundertmal hören: Graphische Darstellung	53
Viele Wege führen dahin: Stetigkeit	55
Abbildungen zwischen mehrdimensionalen Räumen	57
Ableiten bis zum Abwinken: totale Differenzierbarkeit	58
Nur einen Teil: die partielle Ableitung	58
Totale Differenzierbarkeit	62
Was heißt das denn? Charakterisierungen der Differenzierbarkeit	63
Praktische Berechnung der totalen Ableitung	67
Richtungsableitungen	70
Und weiter so! Ableitungen höherer Ordnung	71
In eine Richtung: partielle Ableitungen höherer Ordnung	71
Vorsicht! Vertauschen partieller Ableitungen geht nicht immer!	72

### **Kapitel 3**

#### ***Darf's noch etwas mehr sein? Mehr Differenzialrechnung*** **75**

Die Kettenregel, eine alte Bekannte	75
Eindimensionales in höherdimensionalen Räumen: Kurven	76
Achtung, Schleudergefahr! Ableitung entlang einer Kurve	77
Und nun überall: die Kettenregel bei Koordinatentransformationen	79
Kettenregel kurz und knapp mit der Jacobi-Matrix	82
In voller Pracht: die Formel für die allgemeine Kettenregel	83
Höhere Ableitungen, Differentialoperatoren und mathematische Schreibfäule	84
Zweite Ableitungen sammeln: Hesse-Matrix	84
div, rot, grad und der Laplace-Operator	85
Der Mittelwertsatz	87
Der Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen	87

### **Kapitel 4**

#### ***Erste Anwendungen der mehrdimensionalen Differenzialrechnung*** **91**

Die Taylorsche Formel	91
Beispielhaft zweidimensionale Funktionen approximieren	92
Einige Spezialfälle zur Taylorschen Formel	93
Das Newton-Verfahren	94
Das eindimensionale Newton-Verfahren	95
Das Newton-Verfahren im mehrdimensionalen Fall	101
Von hinten durch die Brust ins Auge: Implizite Funktionen	104
Implizite Funktionen im Eindimensionalen	104
Mehrdimensionale implizite Funktionen	107

### **Kapitel 5**

#### ***Optimierung*** **111**

Berggipfel und tiefste Schluchten: Extremstellen	111
Höher als die Umgebung? Oder am allerhöchsten?	111

Weniger geht nicht: unrestringierte Optimierung	112
Kritisch! Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema	113
Stationäre Punkte und Tangentialebenen	114
Ganz sicher: hinreichende Optimalitätsbedingung	115
Informationen durch die Hesse-Matrix: Höhen, Tiefen und Sattelpunkte	116
Und wie ist's denn nun? Ein einfacher Positivitätstest.	118
Restringierte Optimierung	120
Die Sache mit den Nebenbedingungen	120
Direkt zum Ziel: Die explizite Methode	121
Der indirekte Weg: Lagrange-Multiplikatoren	123
Problemvergrößerung erleichtert die Lösung	126
Jetzt schreckt nichts mehr: Mehrere Nebenbedingungen	129

## **Teil II**

### **Integralrechnung und Vektoranalysis** **131**

#### **Kapitel 6**

#### **Integralrechnung in zwei oder drei Dimensionen** **133**

Bauklötzchen oder: Die zweidimensionale Integration	133
Wir basteln uns ein Integral	135
Messbare Mengen und Flächeninhalt	137
Flächeninhalt durch Integration berechnen	139
Projizierbare Mengen	139
Zweimal eins ist zwei	141
Integralberechnung ganz praktisch: Beispiele	142
Die zweidimensionale Substitutionsregel	144
Rundes gerade biegen: Polarkoordinaten	146
Im Raum geht das auch: dreidimensionale Integration	150
Dreidimensionale Projizierbarkeiten	151
Drei Integrationen zur dreidimensionalen Integration	153
Krumme Volumina und Integration im Raum	154
Substitutionsregel dreidimensional	156
Etwas Physik: Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente	161

#### **Kapitel 7**

#### **Fäden durch den Raum: Kurvenintegrale** **165**

Punkte und Kurven im dreidimensionalen Raum	165
Wandern mathematisch: Wege und Kurven im $\mathbb{R}^3$	165
Differenzierbare Wege oder Geschwindigkeit!	167
Kurven mit und ohne Ecken!	168
Eine Fahrschule: Rechenregeln für differenzierbare Wege	169

Orientierungslos im Raum: Kurvenintegrale über Skalarfelder	171
Kurvenintegrale ohne Orientierung	171
Dieselbe Kurve – Unabhängigkeit von der Parametrisierung	174
Drahtspiele: Bogenlänge, Masse und Schwerpunkt	174
Orientierte Kurvenintegrale	178
Da entlang: Kurven mit Richtung	178
Einbahnstraße: der Tangenteneinheitsvektor	179
Der Weg ist das Ziel: Orientierung und Parametrisierung	180
Viele, viele Pfeile: Vektorfelder	180
Arbeit ist – ein orientiertes Kurvenintegral!	181
Da könnte doch etwas sein: Potentialfelder	184
Gibt es Stammfunktionen für Vektorfelder?	185
Stammtischfähig: konservative Vektorfelder	186
Integrieren kann so schön sein: der erste Hauptsatz für Kurvenintegrale	187
Kurvenintegrale über Potentialfelder sind wegunabhängig!	188
Integrabilitätsbedingungen oder der zweite Hauptsatz	189
Das Potential ausschöpfen: Berechnung einer Stammfunktion	192
<b>Kapitel 8</b>	
<b>Eine Dimension nach oben: Flächenintegrale</b>	<b>195</b>
Flächen im dreidimensionalen Raum	195
Mathematische Darstellungen von Flächen im Raum	195
Voll normal: reguläre Bereiche	198
Nur nicht ausrutschen! Glatte Flächen	200
Koordinatensysteme auf glatten Flächen	201
Flächen mit Knick: Stückweise glatt	203
Jede Menge parametrisierter Flächen: Beispiele	203
Wie groß ist eine gebogene Fläche?	207
Viele kleine Plättchen: auf dem Weg zum Flächeninhalt	208
Eine Formel für den Flächeninhalt	210
Jede Menge Inhalt: Formeln für bestimmte Flächeninhalte	211
Flächenintegrale mit und ohne Orientierung	213
Skalarfelder auf Flächen: orientierungslos	214
Mit Orientierung: Vektorfelder über Flächen integrieren	215
Alles fließt: Eine physikalische Deutung	215
<b>Kapitel 9</b>	
<b>Die hohe Kunst der Vektoranalysis: Integralsätze</b>	<b>217</b>
Differentialoperatoren und Integralrechnung	217
Differentialoperatoren: Laplace-Operator, Divergenz und Rotation	218
Operatoroperationen mit dem Nabla-Operator	219
Es wirbelt herum: Rotation und Potentialfelder	221

Rechenregeln zur Rotation, Divergenz und Gradient	225
Noch mehr Rechenregeln	226
Harmonie unter Funktionen	227
Der Gaußsche Integralsatz	228
Oben und Unten: Orientierung glatter Flächen	228
Quellen, Senken und der Fluss durch die Oberfläche	230
Die Sätze von Kelvin–Stokes und Green	233
Der Greensche Integralsatz	237

### Teil III

## **Gewöhnliche Differentialgleichungen** **239**

### **Kapitel 10**

#### **Es ändert sich, wie funktioniert's? Grundlegende Fragestellung bei Differentialgleichungen** **241**

Was sind Differentialgleichungen?	241
Gewöhnlich oder partiell: Definitionen	241
Vom Pendel zum Räuber–Beute-Modell: überall Differentialgleichungen	242
Ordnung muss sein: die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung	243
Gibt's das und wenn ja, wieviele? Existenz und Eindeutigkeit	245
Langsam anfangen: gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	246
Am Anfang der Anfangswert und dann? Anfangswertprobleme	246
Das gibt's! Der Satz von Picard–Lindelöf	248
Graphische Veranschaulichungen	251
Das Richtungsfeld	252
Nicht aus Star-Trek: Die Isoklinen	253

### **Kapitel 11**

#### **Kochrezepte: explizite Lösungsmethoden für spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen** **255**

Die exakte Differentialgleichung	255
Was eine Differentialgleichung exakt macht: die Potentialfunktion!	256
Wieder einmal: konservative Vektorfelder	256
Implizite Lösungen einer exakten Differentialgleichung	258
Unpassendes passend machen: Integrierende Faktoren	260
Separable Differentialgleichungen	262
Oh – das ist ja exakt!	262
Ähnlich die Ähnlichkeits-Differentialgleichungen!	265
Lineare Differentialgleichungen	266

## **Kapitel 12**

### **Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung 271**

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung	271
Alles in Einem: die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung	272
Funktionale Vektoren oder Lineare Algebra im Funktionenraum	272
Lineare Unabhängigkeit von Funktionen	273
Ein grundlegender Ableitungsoperator	275
Jede lineare Differentialgleichung hat ihren eigenen Operator	275
Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung	276
Rückkehr der Kerne: allgemeine Lösung der homogenen Gleichung	277
Ganz grundlegend: das Fundamentalsystem	277
Funktionen im Carré: Die Wronski-Matrix	279
Die inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung	280
Lösung der inhomogenen Differentialgleichung	280
Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten	281
Das Reduktionsverfahren von d'Alembert	284

## **Kapitel 13**

### **Spezielle lineare Differentialgleichungen 287**

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	287
Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	289
Das charakteristische Polynom	289
Lösungen bei reellen Nullstellen	290
Lösungen bei komplexen Nullstellen	291
Ein spezielles Fundamentalsystem	292
Schritt für Schritt zur Lösung	293
Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung	296
Spezielle rechte Seiten	296
Die Eulersche Differentialgleichung	301
Ein Lösungsverfahren zur Eulerschen Differentialgleichung	302

## **Kapitel 14**

### **Systeme linearer Differentialgleichungen 307**

Allgemeine lineare Differentialgleichungssysteme	307
Schreibweisen: Vektorwertige Funktionen oder ein Vektor von Funktionen	307
Was ist ein Differentialgleichungssystem?	308
Zwei Seiten der Medaille: Eine lineare Differentialgleichung als Differentialgleichungssystem	311
Gibt's denn das? Existenz und Eindeutigkeit bei Differentialgleichungs- systemen	313
Das alte Spiel: Lösungsmethode für lineare Differentialgleichungssysteme	314
Eins: die Fundamentalmatrix des linearen Systems	314
Zwei: die allgemeine Lösung homogener linearer Systeme	316

Drei: die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Systems	317
Noch einmal: die Variation der Konstanten	318
Spezieller: Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	320
Kein bisschen kompliziert: Komplexwertige Lösungen	320
Schon wieder die Exponentialfunktion: Lösung des homogenen Systems	321
Eigenwerte liefern Lösungen	322
Auf dem Weg zum Fundamentalsystem	323
Einfache Eigenwerte: reell – geschenkt!	323
Lösungspärchen bei einfachen komplexen Eigenwerten	324
Hauptvektoren	328
Die Matrix-Exponentialfunktion	331
Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten	334

## **Teil IV**

### **Funktionentheorie**

**341**

#### **Kapitel 15**

##### **Überhaupt nicht hohl: Holomorphe Funktionen**

**343**

Funktionentheorie oder komplexe Analysis	343
Fast wie im Reellen: Folgen komplexer Zahlen	343
Teuflische Tücke im Detail: die komplexe Ableitung	346
Na sowas! Schon wieder Differentialgleichungen: Cauchy–Riemann	347
Dem Kind einen Namen geben: holomorphe Funktionen	348
Verwaltungsfreude: Regeln für die komplexe Ableitung	349

#### **Kapitel 16**

##### **Komplexe Integration**

**353**

Vorsichtig anfangen: Eindimensionale Integration im Komplexen	353
Teilen, teilen! Integrale komplexwertiger reeller Funktionen	353
Krumme Linien: das komplexe Kurvenintegral	353
Es geht! Praktische Berechnung komplexer Kurvenintegrale	354
Viel mehr zu komplexen Kurvenintegralen!	358
Richtungsweisend: orientierte Integrale	358
Das berühmte Beispiel von Cauchy	359
Der Integralsatz von Cauchy	360
Fast alles verschwindet!	360
Ein bisschen beweisen: Beweisskizze zum Integralsatz	361
Noch einmal: das Cauchy-Beispiel und eine Folgerung	362
Böse Stellen: die Singularitäten	363
Igitt! Eine Singularität!	363

Da bleibt doch was... das Residuum	364
Das ist ja einfach! Berechnung des Residuums für Polstellen 1. Ordnung	365
Kurvenintegrale um Singularitäten	365
Singularitäten links liegenlassen: der Residuensatz	365
Hilfe bei reellen Integralen: komplexe Umwege vereinfachen die Integration	366
<b>Kapitel 17</b>	
<b>Potenz- und Laurentreihen</b>	<b>369</b>
Mal wieder Potenzreihen – diesmal komplex!	369
Nach altem Rezept: die Potenzreihen	369
Diesmal wirklich: Konvergenzkreise	369
Im Kreis: Potenzreihen sind holomorph!	371
Trost bei Singularitäten: Laurentreihen	373
Laurentreihen, Residuen und Cauchys Integralformel	377
Einige besondere Eigenschaften holomorpher Funktionen	380
Funktionswerte und Kurvenintegrale holomorpher Funktionen	381
Identitätssatz und Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen	382
Der Fundamentalsatz der Algebra	383
<b>Teil V</b>	
<b>Der Top-Ten-Teil</b>	<b>385</b>
<b>Kapitel 18</b>	
<b>Tipps und Tricks um einen Mathekurs zu überstehen</b>	<b>387</b>
Die Schwierigkeiten der höheren Mathematik	387
Nicht locker lassen!	388
Immer noch: Glauben Sie nichts!	389
Üben Sie! Üben Sie!	390
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>393</b>