

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>10 Höhere Analysis</b>	<b>1</b>
10.1 Die Grundideen der modernen Analysis	1
10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien	3
10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis	5
10.1.3 Glattheit	11
10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale	12
10.2.1 Tensordefinition	13
10.2.2 Beispiele für Tensoren	14
10.2.3 Beispiele für Pseudotensoren	17
10.2.4 Tensoralgebra	18
10.2.5 Tensoranalysis	21
10.2.6 Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik	25
10.2.7 Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen	26
10.2.8 Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	39
10.2.9 Anwendungen in der Elektrodynamik	44
10.2.10 Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie)	51
10.3 Integralgleichungen	53
10.3.1 Allgemeine Begriffe	53
10.3.2 Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können	54
10.3.3 Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können	56
10.3.4 Die Abelsche Integralgleichung	57
10.3.5 Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art	59
10.3.6 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative	61
10.3.7 Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme	66
10.3.8 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert-Schmidt-Theorie)	70
10.3.9 Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion	74
10.3.10 Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie	77
10.3.11 Singuläre Integralgleichungen und das Riemann-Hilbert-Problem	78
10.3.12 Wiener-Hopf-Integralgleichungen	80
10.3.13 Näherungsverfahren	80
10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der math. Physik	83
10.4.1 Definition von Distributionen	84
10.4.2 Das Rechnen mit Distributionen	86
10.4.3 Die Grundleistung linearer partieller Differentialgleichungen	89
10.4.4 Anwendung auf Randwertprobleme	91
10.4.5 Anwendung auf Anfangswertprobleme	92
10.4.6 Die Fouriertransformation	93
10.4.7 Pseudodifferentialoperatoren	96
10.4.8 Fourierintegraloperatoren	98

10.5	Moderne Maß- und Integrationstheorie . . . . .	101
10.5.1	Maß . . . . .	102
10.5.2	Integral . . . . .	104
10.5.3	Eigenschaften des Integrals . . . . .	106
10.5.4	Grenzwertsätze . . . . .	107
10.5.5	Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem $\mathbb{R}^n$ . . . . .	108
10.5.6	Das eindimensionale Lebesgue–Stieltjes-Integral . . . . .	109
10.5.7	Maße auf topologischen Räumen . . . . .	110
<b>Literatur zu Kapitel 10 . . . . .</b>		<b>111</b>
<b>11</b>	<b>Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen</b>	<b>115</b>
11.1	Grundideen . . . . .	115
11.1.1	Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren . . . . .	119
11.1.2	Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen . . . . .	120
11.1.3	Das Konvergenzproblem für Fourierreihen . . . . .	123
11.1.4	Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip . . . . .	124
11.1.5	Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis) . . . . .	128
11.1.6	Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis . . . . .	129
11.2	Räume . . . . .	131
11.2.1	Topologische Räume . . . . .	131
11.2.2	Metrische Räume . . . . .	136
11.2.3	Lineare Räume . . . . .	138
11.2.4	Banachräume . . . . .	147
11.2.5	Hilberträume . . . . .	155
11.2.6	Sobolevräume . . . . .	160
11.2.7	Lokalkonvexe Räume . . . . .	165
11.3	Existenzsätze und ihre Anwendungen . . . . .	167
11.3.1	Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik . . . . .	167
11.3.2	Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem . . . . .	170
11.3.3	Die Gleichung $\lambda u = Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren $K$ und Integralgleichungen (Hilbert–Schmidt-Theorie) . . . . .	173
11.3.4	Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren . . . . .	176
11.3.5	Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik . . . . .	182
11.3.6	Halbgruppen . . . . .	186
11.4	Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis . . . . .	186
11.4.1	Iterationsverfahren . . . . .	186
11.4.2	Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente . . . . .	188
11.4.3	Das duale Ritzsche Verfahren (Trefftzches Verfahren) . . . . .	190
11.4.4	Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren) . . . . .	192
11.4.5	Projektions-Iterationsverfahren . . . . .	197
11.4.6	Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis . . . . .	198
11.5	Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis . . . . .	199
11.5.1	Das Hahn–Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben . . . . .	199
11.5.2	Das Bairesche Kategorieprinzip . . . . .	204
11.5.3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .	205
11.5.4	Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme . . . . .	205
11.5.5	Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen . . . . .	206
11.5.6	Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative) . . . . .	208
11.5.7	Kompaktheit und ein Extremalprinzip . . . . .	209
11.6	Das Spektrum . . . . .	214
11.6.1	Grundbegriffe . . . . .	214
11.6.2	Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren . . . . .	216

11.6.3	Funktionen von Operatoren . . . . .	219
11.6.4	Störungstheorie . . . . .	222
11.6.5	Streutheorie . . . . .	224
11.6.6	Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren . . . . .	224
11.7	Operatoralgebren (Algebra und Analysis) . . . . .	226
11.7.1	Grundbegriffe . . . . .	226
11.7.2	Kompakte Operatoren und Operatorenideale . . . . .	228
11.7.3	Darstellungstheorie für Operatoralgebren . . . . .	229
11.7.4	Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren . . . . .	231
11.8	Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik . . . . .	232
<b>Literatur zu Kapitel 11 . . . . .</b>		<b>235</b>
<b>12</b>	<b>Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen</b>	<b>237</b>
12.1	Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen . . . . .	237
12.1.1	Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren . . . . .	237
12.1.2	Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit . . . . .	240
12.1.3	Der Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser und Halbordnung . . . . .	240
12.2	Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen	241
12.3	Differentiation von Operatoren . . . . .	241
12.4	Das Newtonverfahren . . . . .	243
12.5	Der Satz über implizite Funktionen . . . . .	245
12.6	Bifurkationstheorie . . . . .	246
12.6.1	Notwendige Bifurkationsbedingung . . . . .	246
12.6.2	Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation . . . . .	247
12.6.3	Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur	247
12.6.4	Stabilitätsverlust und Bifurkation . . . . .	248
12.6.5	Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov–Schmidt) . .	249
12.7	Extremalprobleme . . . . .	250
12.7.1	Minimumprobleme . . . . .	250
12.7.2	Sattelpunktprobleme . . . . .	253
12.7.3	Das Gebirgspasstheorem . . . . .	253
12.7.4	Die Ljusternik–Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme . . . . .	253
12.8	Monotone Operatoren . . . . .	254
12.9	Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze . . . . .	255
12.10	Nichtlineare Fredholmoperatoren . . . . .	258
<b>Literatur zu Kapitel 12 . . . . .</b>		<b>259</b>
<b>13</b>	<b>Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit</b>	<b>261</b>
13.1	Grundideen . . . . .	261
13.1.1	Einführende Beispiele . . . . .	262
13.1.2	Klassifikation dynamischer Systeme . . . . .	264
13.1.3	Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme . . . .	265
13.2	Dynamische Systeme in der Ebene . . . . .	265
13.2.1	Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte . . . . .	265
13.2.2	Nichtlineare Störungen . . . . .	267
13.2.3	Grenzyklen . . . . .	267

13.3	Stabilität . . . . .	268
13.3.1	Stabilität von stationären Punkten . . . . .	268
13.3.2	Strukturelle Stabilität . . . . .	269
13.4	Bifurkation . . . . .	269
13.4.1	Grundidee . . . . .	269
13.4.2	Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe) . . . . .	269
13.4.3	Hopf bifurkation . . . . .	270
13.5	Ljapunovfunktion . . . . .	270
13.6	Die Methode der Zentrumsmanigfaltigkeit . . . . .	272
13.7	Attraktoren . . . . .	276
13.8	Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren . . . . .	277
13.9	Fraktale . . . . .	278
13.10	Übergang zum Chaos . . . . .	279
13.10.1	Kontinuierliche dynamische Systeme . . . . .	279
13.10.2	Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung . . . . .	280
13.11	Ergodizität . . . . .	282
13.12	Störung quasiperiodischer Bewegungen . . . . .	283
13.12.1	Grundideen . . . . .	283
13.12.2	Typische Resonanzerscheinungen . . . . .	284
13.12.3	Relaxation (quasistatische Näherung) . . . . .	285
13.13	Singularitätentheorie (Katastrophentheorie) . . . . .	286
13.13.1	Reguläres und singuläres Verhalten . . . . .	286
13.13.2	Strukturelle Stabilität . . . . .	288
13.13.3	Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen . . . . .	289
13.13.4	Parameterfamilien und Elementarkatastrophen . . . . .	290
13.14	Information und Chaos . . . . .	292
13.15	Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation . . . . .	293
13.16	Unendlichdimensionale dynamische Systeme . . . . .	294
13.16.1	Grundideen . . . . .	294
13.16.2	Die Poissonsgleichung . . . . .	295
13.16.3	Das Eigenwertproblem für die Laplacegleichung . . . . .	297
13.16.4	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	297
13.16.5	Die Wellengleichung . . . . .	298
13.16.6	Die Schrödingergleichung . . . . .	299
13.17	Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operator differentialgleichungen . . . . .	301
13.17.1	Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen . . . . .	302
13.17.2	Anwendung auf homogene Differentialgleichungen . . . . .	303
13.17.3	Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen . . . . .	303
13.17.4	Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen . . . . .	304
13.18	Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen . . . . .	304
13.18.1	Bewegung eines Quantenteilchens auf der $x$ -Achse . . . . .	306
13.18.2	Das Wasserstoffatom . . . . .	307
13.18.3	Streuprozesse . . . . .	308
	<b>Literatur zu Kapitel 13 . . . . .</b>	<b>309</b>

<b>14</b>	<b>Nichtlineare partielle Differentialgleichungen</b>	<b>311</b>
14.1	Grundideen . . . . .	312
14.2	Reaktions-Diffusionsgleichungen . . . . .	316
14.2.1	Fortschreitende Wellen . . . . .	316
14.2.2	Globale Attraktoren . . . . .	317
14.2.3	Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme . . . . .	318
14.3	Nichtlineare Wellengleichungen . . . . .	319
14.3.1	Die Lebensdauer von glatten Lösungen . . . . .	319
14.3.2	Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme . . . . .	320
14.3.3	Der quasilineare Spezialfall . . . . .	321
14.3.4	Anwendungen . . . . .	321
14.4	Die Gleichungen der Hydrodynamik . . . . .	322
14.4.1	Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten . . . . .	322
14.4.2	Die Navier–Stokesschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz . . . . .	323
14.5	Variationsprobleme . . . . .	326
14.5.1	Grundidee . . . . .	326
14.5.2	Die allgemeinen Euler–Lagrange–Gleichungen . . . . .	329
14.5.3	Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem) . . . . .	330
14.5.4	Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen . . . . .	332
14.5.5	Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme . . . . .	333
14.6	Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie . . . . .	334
14.6.1	Das Variationsproblem der Elastostatik . . . . .	334
14.6.2	Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material . . . . .	336
14.6.3	Die Grundgleichungen der Elastodynamik . . . . .	337
14.6.4	Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik . . . . .	339
14.6.5	Balkenbiegung und Bifurkation . . . . .	339
14.7	Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	341
14.8	Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen . . . . .	341
14.8.1	Grundideen . . . . .	341
14.8.2	Konventionen . . . . .	343
14.8.3	Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons . . . . .	344
14.8.4	Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell–Dirac-Gleichungen der Quanten-elektrodynamik . . . . .	346
14.8.5	Die Grundideen der Quantenfeldtheorie . . . . .	347
14.8.6	$SU(N)$ -Eichfeldtheorie . . . . .	349
14.9	Die Geometrisierung der modernen Physik . . . . .	352
	<b>Literatur zu Kapitel 14 . . . . .</b>	<b>354</b>
<b>15</b>	<b>Mannigfaltigkeiten</b>	<b>357</b>
15.1	Grundbegriffe . . . . .	357
15.1.1	Definition einer Mannigfaltigkeit . . . . .	358
15.1.2	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	360
15.1.3	Orientierbarkeit . . . . .	361
15.1.4	Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	362
15.1.5	Differentiation von klassischen Tensorfeldern . . . . .	363
15.1.6	Tangentenvektoren und Tangentialraum . . . . .	364
15.1.7	Kotangentenvektoren und Kotangentialraum . . . . .	366
15.1.8	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	367
15.1.9	Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	368
15.1.10	Mannigfaltigkeiten als topologische Räume . . . . .	368

15.2	Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten . . . . .	369
15.3	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten . . . . .	371
15.4	Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	373
15.4.1	Tensoralgebra . . . . .	373
15.4.2	Tensorfelder . . . . .	375
15.4.3	Differentialformen . . . . .	375
15.4.4	Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen . . . . .	379
15.4.5	Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	381
15.4.6	Lieableitung von Tensorfeldern . . . . .	382
15.4.7	Der Satz von Frobenius . . . . .	385
15.5	Anwendungen in der Thermodynamik . . . . .	389
15.6	Klassische Mechanik und symplektische Geometrie . . . . .	391
15.6.1	Grundidee . . . . .	391
15.6.2	Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	392
15.6.3	Symplektische Geometrie . . . . .	393
15.7	Anwendungen in der statistischen Physik . . . . .	394
15.7.1	Das Grundmodell der statistischen Physik . . . . .	394
15.7.2	Anwendungen auf die Quantenstatistik . . . . .	396
15.7.3	Klassische Gibbssche Statistik im Phasenraum . . . . .	397
15.8	Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie . . . . .	398
Literatur zu Kapitel 15 . . . . .		399
<b>16</b>	<b>Riemannsche Geometrie und allg. Relativitätstheorie</b>	<b>401</b>
16.1	Der klassische Kalkül . . . . .	401
16.1.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina . . . . .	402
16.1.2	Krümmung . . . . .	403
16.1.3	Paralleltransport . . . . .	404
16.1.4	Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden) . . . . .	404
16.1.5	Anwendung auf die nichteuklidische Geometrie . . . . .	405
16.1.6	Der $\delta$ -Operator und der Laplaceoperator . . . . .	407
16.1.7	Die Volumenform . . . . .	408
16.1.8	Der $*$ -Operator von Hodge . . . . .	408
16.2	Der invariante Kalkül . . . . .	409
16.2.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina . . . . .	409
16.2.2	Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	410
16.2.3	Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang . . . . .	410
16.2.4	Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang . . . . .	412
16.2.5	Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	413
16.2.6	Geodätische . . . . .	413
16.3	Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	415
16.3.1	Längentreue Abbildungen . . . . .	415
16.3.2	Winkeltreue (konforme) Abbildungen . . . . .	417
16.4	Kählermannigfaltigkeiten . . . . .	418
16.5	Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	419
16.5.1	Physikalische Grundidee . . . . .	419
16.5.2	Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	420
16.5.3	Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers . . . . .	421
16.5.4	Schwarze Löcher . . . . .	422
16.5.5	Die Expansion des Weltalls (Urknall) . . . . .	422

<b>Literatur zu Kapitel 16</b>	<b>425</b>
<b>17 Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen</b>	<b>427</b>
17.1 Grundideen	428
17.2 Gruppen	437
17.2.1 Grundbegriffe	437
17.2.2 Morphismen von Gruppen	438
17.2.3 Darstellungen von Gruppen	440
17.2.4 Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik	442
17.3 Darstellungen endlicher Gruppen	444
17.4 Liealgebren	446
17.4.1 Grundbegriffe	446
17.4.2 Beispiele von Liealgebren	447
17.4.3 Darstellungen von Liealgebren	449
17.5 Liegruppen	450
17.5.1 Grundbegriffe	450
17.5.2 Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Lie'sche Linearisierungsprinzip)	451
17.5.3 Struktur von Liegruppen	453
17.5.4 Beispiele	453
17.5.5 Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe	454
17.5.6 Darstellungen	455
17.6 Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen	456
17.7 Anwendungen auf den Elektronenspin	461
17.8 Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen	464
17.9 Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	472
17.10 Transformationsgruppen und Symmetrie von Mannigfaltigkeiten	474
17.11 Differentialgleichungen und Symmetrie	478
17.11.1 Invariante Funktionen	479
17.11.2 Invariante Differentialgleichungen	480
17.11.3 Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen	481
17.11.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen	482
17.12 Die innere Symmetrie Lie'scher Gruppen und ihrer Liealgebren	483
17.13 Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra	485
<b>Literatur zu Kapitel 17</b>	<b>486</b>
<b>18 Topologie – Mathematik des qualitativen Verhaltens</b>	<b>487</b>
18.1 Das Ziel der Topologie	487
18.2 Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik	491
18.2.1 Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie	491
18.2.2 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	492
18.2.3 Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten	493
18.2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern	493
18.3 Homotopie (Deformation)	495
18.3.1 Erweiterung stetiger Abbildungen	496
18.3.2 Der Abbildungsgrad	496

18.3.3	Die Fundamentalgruppe . . . . .	497
18.3.4	Überlagerungsmannigfaltigkeiten . . . . .	499
18.4	Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie . . . .	500
18.5	De Rham'sche Kohomologie . . . . .	503
18.6	Homologie . . . . .	506
18.6.1	Die Homologie eines Dreiecks . . . . .	506
18.6.2	Singuläre Homologie topologischer Räume . . . . .	508
18.6.3	Singuläre Kohomologie topologischer Räume . . . . .	510
18.6.4	Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten .	510
18.7	Exakte Sequenzen . . . . .	511
18.7.1	Die Mayer–Vietoris-Sequenz . . . . .	512
18.7.2	Homologie- und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten . . . . .	513
18.7.3	Höhere Homotopiegruppen . . . . .	515
18.7.4	Die exakte Homotopiesequenz eines Faserbündels . . . . .	516
18.7.5	Fundamentalgruppe und Symmetrie . . . . .	518
	<b>Literatur zu Kapitel 18 . . . . .</b>	<b>519</b>
<b>19</b>	<b>Krümmung, Topologie und Analysis . . . . .</b>	<b>521</b>
19.1	Grundideen . . . . .	521
19.2	Bündel . . . . .	523
19.3	Produktbündel und Eichfeldtheorie . . . . .	525
19.4	Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung . . . . .	528
19.4.1	Die Zusammenhangsform $A$ auf $EH$ . . . . .	529
19.4.2	Die Krümmungsform $F$ auf $EH$ . . . . .	529
19.4.3	Geometrische Interpretation . . . . .	529
19.5	Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung . . . . .	531
19.6	Anwendung auf die Methode des repère mobile von É. Cartan . . . . .	534
19.6.1	Die globalen Strukturgleichungen von Cartan . . . . .	536
19.6.2	Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan . . . . .	537
19.7	Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports . . . . .	537
19.8	Die Struktur Riemannscher Flächen . . . . .	539
19.8.1	Algebraische Funktionen als komplexe Kurven . . . . .	541
19.8.2	Kompakte Riemannsche Flächen . . . . .	545
19.8.3	Der Uniformisierungssatz . . . . .	547
19.8.4	Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen . . . . .	549
19.9	Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen . . . . .	549
19.9.1	Garben . . . . .	550
19.9.2	Die Lösung des Cousinschen Problems . . . . .	551
19.9.3	Die Lösung des Problems von Mittag–Leffler . . . . .	552
19.9.4	Garbenkohomologie . . . . .	552
19.10	Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel . . . . .	554
19.10.1	Grundideen . . . . .	554
19.10.2	Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit $M$ . . . . .	556
19.10.3	Der Weil–Morphismus und charakteristische Klassen . . . . .	558
19.10.4	Chernklassen . . . . .	559
19.11	Das Atiyah–Singer–Indextheorem . . . . .	561
19.11.1	Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren . . . . .	562



19.11.2	Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren . . . . .	564
19.11.3	Das Indextheorem für elliptische Komplexe . . . . .	565
19.11.4	Anwendungen auf den de Rham Komplex . . . . .	567
19.11.5	Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex . . . . .	568
19.11.6	Das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch . . . . .	568
19.12	Minimalflächen . . . . .	569
19.13	Stringtheorie . . . . .	572
19.14	Supermathematik und Superstringtheorie . . . . .	576
	<b>Literatur zu Kapitel 19 . . . . .</b>	<b>577</b>
	<b>Zeittafel zur Geschichte der Mathematik . . . . .</b>	<b>581</b>
	<b>Literatur zur Geschichte der Mathematik . . . . .</b>	<b>600</b>
	<b>Mathematische Symbole . . . . .</b>	<b>605</b>
	<b>Index</b>	<b>612</b>