

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

10 Höhere Analysis	v
10.1 Die Grundideen der modernen Analysis	1
10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien	3
10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis	5
10.1.3 Glattheit	11
10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale	12
10.2.1 Tensordefinition	13
10.2.2 Beispiele für Tensoren	14
10.2.3 Beispiele für Pseudotensoren	17
10.2.4 Tensoralgebra	18
10.2.5 Tensoranalysis	21
10.2.6 Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik	25
10.2.7 Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen	26
10.2.8 Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	39
10.2.9 Anwendungen in der Elektrodynamik	44
10.2.10 Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie)	51
10.3 Integralgleichungen	53
10.3.1 Allgemeine Begriffe	53
10.3.2 Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können	54
10.3.3 Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können	56
10.3.4 Die Abelsche Integralgleichung	57
10.3.5 Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art	59
10.3.6 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative	61
10.3.7 Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme	66
10.3.8 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert-Schmidt-Theorie)	70
10.3.9 Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion	74
10.3.10 Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie	77
10.3.11 Singuläre Integralgleichungen und das Riemann–Hilbert–Problem	78
10.3.12 Wiener–Hopf–Integralgleichungen	80
10.3.13 Näherungsverfahren	80
10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der math. Physik	83
10.4.1 Definition von Distributionen	84
10.4.2 Das Rechnen mit Distributionen	86
10.4.3 Die Grundlösung linearer partieller Differentialgleichungen	89
10.4.4 Anwendung auf Randwertprobleme	91
10.4.5 Anwendung auf Anfangswertprobleme	92
10.4.6 Die Fouriertransformation	93
10.4.7 Pseudodifferentialoperatoren	96
10.4.8 Fourierintegraloperatoren	98

10.5	Moderne Maß- und Integrationstheorie	101
10.5.1	Maß	102
10.5.2	Integral	104
10.5.3	Eigenschaften des Integrals	106
10.5.4	Grenzwertsätze	107
10.5.5	Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem \mathbb{R}^n	108
10.5.6	Das eindimensionale Lebesgue–Stieltjes-Integral	109
10.5.7	Maße auf topologischen Räumen	110
	Literatur zu Kapitel 10	111
11	Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen	115
11.1	Grundideen	115
11.1.1	Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren	119
11.1.2	Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen	120
11.1.3	Das Konvergenzproblem für Fourierreihen	123
11.1.4	Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip	124
11.1.5	Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis)	128
11.1.6	Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis	129
11.2	Räume	131
11.2.1	Topologische Räume	131
11.2.2	Metrische Räume	136
11.2.3	Lineare Räume	138
11.2.4	Banachräume	147
11.2.5	Hilberträume	155
11.2.6	Sobolevräume	160
11.2.7	Lokalkonvexe Räume	165
11.3	Existenzsätze und ihre Anwendungen	167
11.3.1	Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	167
11.3.2	Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem	170
11.3.3	Die Gleichung $\lambda u = Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren K und Integralgleichungen (Hilbert–Schmidt-Theorie)	173
11.3.4	Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren	176
11.3.5	Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik	182
11.3.6	Halbgruppen	186
11.4	Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis	186
11.4.1	Iterationsverfahren	186
11.4.2	Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente	188
11.4.3	Das duale Ritzsche Verfahren (Trefftzsches Verfahren)	190
11.4.4	Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren)	192
11.4.5	Projektions-Iterationsverfahren	197
11.4.6	Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis	198
11.5	Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis	199
11.5.1	Das Hahn–Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben	199
11.5.2	Das Bairesche Kategorieprinzip	204
11.5.3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	205
11.5.4	Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme	205
11.5.5	Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen	206
11.5.6	Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative)	208
11.5.7	Kompaktheit und ein Extremalprinzip	209
11.6	Das Spektrum	214
11.6.1	Grundbegriffe	214
11.6.2	Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren	216

11.6.3	Funktionen von Operatoren	219
11.6.4	Störungstheorie	222
11.6.5	Streutheorie	224
11.6.6	Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren	224
11.7	Operatoralgebren (Algebra und Analysis)	226
11.7.1	Grundbegriffe	226
11.7.2	Kompakte Operatoren und Operatorenideale	228
11.7.3	Darstellungstheorie für Operatoralgebren	229
11.7.4	Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren	231
11.8	Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik	232
Literatur zu Kapitel 11		235
12	Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen	237
12.1	Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen	237
12.1.1	Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren	237
12.1.2	Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit	240
12.1.3	Der Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser und Halbordnung	240
12.2	Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen	241
12.3	Differentiation von Operatoren	241
12.4	Das Newtonverfahren	243
12.5	Der Satz über implizite Funktionen	245
12.6	Bifurkationstheorie	246
12.6.1	Notwendige Bifurkationsbedingung	246
12.6.2	Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation	247
12.6.3	Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur	247
12.6.4	Stabilitätsverlust und Bifurkation	248
12.6.5	Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov–Schmidt)	249
12.7	Extremalprobleme	250
12.7.1	Minimumprobleme	250
12.7.2	Sattelpunktprobleme	253
12.7.3	Das Gebirgspasstheorem	253
12.7.4	Die Ljusternik–Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme	253
12.8	Monotone Operatoren	254
12.9	Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze	255
12.10	Nichtlineare Fredholmoperatoren	258
Literatur zu Kapitel 12		259
13	Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit	261
13.1	Grundideen	261
13.1.1	Einführende Beispiele	262
13.1.2	Klassifikation dynamischer Systeme	264
13.1.3	Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme	265
13.2	Dynamische Systeme in der Ebene	265
13.2.1	Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte	265
13.2.2	Nichtlineare Störungen	267
13.2.3	Grenzzyklen	267

13.3	Stabilität	268
13.3.1	Stabilität von stationären Punkten	268
13.3.2	Strukturelle Stabilität	269
13.4	Bifurkation	269
13.4.1	Grundidee	269
13.4.2	Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe)	269
13.4.3	Hopfbifurkation	270
13.5	Ljapunovfunktion	270
13.6	Die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit	272
13.7	Attraktoren	276
13.8	Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren	277
13.9	Fraktale	278
13.10	Übergang zum Chaos	279
13.10.1	Kontinuierliche dynamische Systeme	279
13.10.2	Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung	280
13.11	Ergodizität	282
13.12	Störung quasiperiodischer Bewegungen	283
13.12.1	Grundideen	283
13.12.2	Typische Resonanzerscheinungen	284
13.12.3	Relaxation (quasistatische Näherung)	285
13.13	Singularitätentheorie (Katastrophentheorie)	286
13.13.1	Reguläres und singuläres Verhalten	286
13.13.2	Strukturelle Stabilität	288
13.13.3	Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen	289
13.13.4	Parameterfamilien und Elementarkatastrophen	290
13.14	Information und Chaos	292
13.15	Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation	293
13.16	Unendlichdimensionale dynamische Systeme	294
13.16.1	Grundideen	294
13.16.2	Die Poissons-Gleichung	295
13.16.3	Das Eigenwertproblem für die Laplace-Gleichung	297
13.16.4	Die Wärmeleitungsgleichung	297
13.16.5	Die Wellengleichung	298
13.16.6	Die Schrödingergleichung	299
13.17	Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operator-differentialgleichungen	301
13.17.1	Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen	302
13.17.2	Anwendung auf homogene Differentialgleichungen	303
13.17.3	Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen	303
13.17.4	Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen	304
13.18	Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen	304
13.18.1	Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse	306
13.18.2	Das Wasserstoffatom	307
13.18.3	Streuprozesse	308
	Literatur zu Kapitel 13	309

14	Nichtlineare partielle Differentialgleichungen	311
14.1	Grundideen	312
14.2	Reaktions-Diffusionsgleichungen	316
14.2.1	Fortschreitende Wellen	316
14.2.2	Globale Attraktoren	317
14.2.3	Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme	318
14.3	Nichtlineare Wellengleichungen	319
14.3.1	Die Lebensdauer von glatten Lösungen	319
14.3.2	Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme	320
14.3.3	Der quasilineare Spezialfall	321
14.3.4	Anwendungen	321
14.4	Die Gleichungen der Hydrodynamik	322
14.4.1	Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten	322
14.4.2	Die Navier–Stokesschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz	323
14.5	Variationsprobleme	326
14.5.1	Grundidee	326
14.5.2	Die allgemeinen Euler–Lagrange–Gleichungen	329
14.5.3	Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem)	330
14.5.4	Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen	332
14.5.5	Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme	333
14.6	Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie	334
14.6.1	Das Variationsproblem der Elastostatik	334
14.6.2	Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material	336
14.6.3	Die Grundgleichungen der Elastodynamik	337
14.6.4	Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik	339
14.6.5	Balkenbiegung und Bifurkation	339
14.7	Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	341
14.8	Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen	341
14.8.1	Grundideen	341
14.8.2	Konventionen	343
14.8.3	Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons	344
14.8.4	Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell–Dirac–Gleichungen der Quantenelektrodynamik	346
14.8.5	Die Grundideen der Quantenfeldtheorie	347
14.8.6	$SU(N)$ –Eichfeldtheorie	349
14.9	Die Geometrisierung der modernen Physik	352
Literatur zu Kapitel 14		354
15	Mannigfaltigkeiten	357
15.1	Grundbegriffe	357
15.1.1	Definition einer Mannigfaltigkeit	358
15.1.2	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	360
15.1.3	Orientierbarkeit	361
15.1.4	Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten	362
15.1.5	Differentiation von klassischen Tensorfeldern	363
15.1.6	Tangentenvektoren und Tangentialraum	364
15.1.7	Kotangentenvektoren und Kotangentialraum	366
15.1.8	Untermannigfaltigkeiten	367
15.1.9	Mannigfaltigkeiten mit Rand	368
15.1.10	Mannigfaltigkeiten als topologische Räume	368

15.2	Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten	369
15.3	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten	371
15.4	Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten	373
15.4.1	Tensoralgebra	373
15.4.2	Tensorfelder	375
15.4.3	Differentialformen	375
15.4.4	Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen	379
15.4.5	Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	381
15.4.6	Lieableitung von Tensorfeldern	382
15.4.7	Der Satz von Frobenius	385
15.5	Anwendungen in der Thermodynamik	389
15.6	Klassische Mechanik und symplektische Geometrie	391
15.6.1	Grundidee	391
15.6.2	Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten	392
15.6.3	Symplektische Geometrie	393
15.7	Anwendungen in der statistischen Physik	394
15.7.1	Das Grundmodell der statistischen Physik	394
15.7.2	Anwendungen auf die Quantenstatistik	396
15.7.3	Klassische Gibbs'sche Statistik im Phasenraum	397
15.8	Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie	398
Literatur zu Kapitel 15		399
16	Riemannsche Geometrie und allg. Relativitätstheorie	401
16.1	Der klassische Kalkül	401
16.1.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	402
16.1.2	Krümmung	403
16.1.3	Paralleltransport	404
16.1.4	Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden)	404
16.1.5	Anwendung auf die nichteuclidische Geometrie	405
16.1.6	Der δ -Operator und der Laplaceoperator	407
16.1.7	Die Volumenform	408
16.1.8	Der $*$ -Operator von Hodge	408
16.2	Der invariante Kalkül	409
16.2.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	409
16.2.2	Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	410
16.2.3	Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	410
16.2.4	Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	412
16.2.5	Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	413
16.2.6	Geodätische	413
16.3	Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	415
16.3.1	Längentreue Abbildungen	415
16.3.2	Winkeltreue (konforme) Abbildungen	417
16.4	Kählermannigfaltigkeiten	418
16.5	Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie	419
16.5.1	Physikalische Grundidee	419
16.5.2	Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	420
16.5.3	Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers	421
16.5.4	Schwarze Löcher	422
16.5.5	Die Expansion des Weltalls (Urknall)	422

Literatur zu Kapitel 16	425
17 Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen	427
17.1 Grundideen	428
17.2 Gruppen	437
17.2.1 Grundbegriffe	437
17.2.2 Morphismen von Gruppen	438
17.2.3 Darstellungen von Gruppen	440
17.2.4 Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik	442
17.3 Darstellungen endlicher Gruppen	444
17.4 Liealgebren	446
17.4.1 Grundbegriffe	446
17.4.2 Beispiele von Liealgebren	447
17.4.3 Darstellungen von Liealgebren	449
17.5 Liegruppen	450
17.5.1 Grundbegriffe	450
17.5.2 Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Liesche Linearisierungsprinzip)	451
17.5.3 Struktur von Liegruppen	453
17.5.4 Beispiele	453
17.5.5 Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe	454
17.5.6 Darstellungen	455
17.6 Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen	456
17.7 Anwendungen auf den Elektronenspin	461
17.8 Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen	464
17.9 Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	472
17.10 Transformationsgruppen und Symmetrie von Mannigfaltigkeiten	474
17.11 Differentialgleichungen und Symmetrie	478
17.11.1 Invariante Funktionen	479
17.11.2 Invariante Differentialgleichungen	480
17.11.3 Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen	481
17.11.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen	482
17.12 Die innere Symmetrie Liescher Gruppen und ihrer Liealgebren	483
17.13 Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra	485
Literatur zu Kapitel 17	486
18 Topologie – Mathematik des qualitativen Verhaltens	487
18.1 Das Ziel der Topologie	487
18.2 Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik	491
18.2.1 Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie	491
18.2.2 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	492
18.2.3 Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten	493
18.2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern	493
18.3 Homotopie (Deformation)	495
18.3.1 Erweiterung stetiger Abbildungen	496
18.3.2 Der Abbildungsgrad	496

18.3.3	Die Fundamentalgruppe	497
18.3.4	Überlagerungsmannigfaltigkeiten	499
18.4	Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie	500
18.5	De Rham'sche Kohomologie	503
18.6	Homologie	506
18.6.1	Die Homologie eines Dreiecks	506
18.6.2	Singuläre Homologie topologischer Räume	508
18.6.3	Singuläre Kohomologie topologischer Räume	510
18.6.4	Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten	510
18.7	Exakte Sequenzen	511
18.7.1	Die Mayer–Vietoris-Sequenz	512
18.7.2	Homologie- und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten	513
18.7.3	Höhere Homotopiegruppen	515
18.7.4	Die exakte Homotopiesequenz eines Faserbündels	516
18.7.5	Fundamentalgruppe und Symmetrie	518
Literatur zu Kapitel 18		519
19	Krümmung, Topologie und Analysis	521
19.1	Grundideen	521
19.2	Bündel	523
19.3	Produktbündel und Eichfeldtheorie	525
19.4	Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung	528
19.4.1	Die Zusammenhangsform A auf H	529
19.4.2	Die Krümmungsform F auf H	529
19.4.3	Geometrische Interpretation	529
19.5	Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung	531
19.6	Anwendung auf die Methode des repère mobile von É. Cartan	534
19.6.1	Die globalen Strukturgleichungen von Cartan	536
19.6.2	Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan	537
19.7	Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports	537
19.8	Die Struktur Riemannscher Flächen	539
19.8.1	Algebraische Funktionen als komplexe Kurven	541
19.8.2	Kompakte Riemannsche Flächen	545
19.8.3	Der Uniformisierungssatz	547
19.8.4	Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen	549
19.9	Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen	549
19.9.1	Garben	550
19.9.2	Die Lösung des Cousinschen Problems	551
19.9.3	Die Lösung des Problems von Mittag–Leffler	552
19.9.4	Garbenkohomologie	552
19.10	Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel	554
19.10.1	Grundideen	554
19.10.2	Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit M	556
19.10.3	Der Weil-Morphismus und charakteristische Klassen	558
19.10.4	Chernklassen	559
19.11	Das Atiyah–Singer–Indextheorem	561
19.11.1	Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	562

19.11.2 Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	564
19.11.3 Das Indextheorem für elliptische Komplexe	565
19.11.4 Anwendungen auf den de Rham Komplex	567
19.11.5 Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex	568
19.11.6 Das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch	568
19.12 Minimalflächen	569
19.13 Stringtheorie	572
19.14 Supermathematik und Superstringtheorie	576
Literatur zu Kapitel 19	577
Zeittafel zur Geschichte der Mathematik	581
Literatur zur Geschichte der Mathematik	600
Mathematische Symbole	605
Index	612